



Interférométrie avec des guides d'ondes optiques. Théorie et applications

Pierre Mège

► To cite this version:

Pierre Mège. Interférométrie avec des guides d'ondes optiques. Théorie et applications. Astrophysique [astro-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2002. Français. NNT : . tel-00010162v2

HAL Id: tel-00010162

<https://theses.hal.science/tel-00010162v2>

Submitted on 4 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE
PRÉSENTÉE PAR

Pierre Mège

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

SPÉCIALITÉ ASTROPHYSIQUE

INTERFÉROMÉTRIE AVEC DES GUIDES D'ONDES OPTIQUES.
THÉORIE ET APPLICATIONS.

DATE DE SOUTENANCE : 15 novembre 2002

COMPOSITION DU JURY :

Pierre Benech	Président
Stuart Shaklan	Rapporteur
Michel Tallon	Rapporteur
Romain Petrov	Examineur
Alain Chelli	Directeur de thèse
Fabien Malbet	Co-Directeur de thèse

THÈSE PRÉPARÉE AU SEIN DU LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE,
Observatoire de Grenoble, UJF/CNRS, BP 53, F-38 041 Grenoble CEDEX 9

Table des matières

Remerciements	1
Résumé	3
Abstract	5
1 Introduction	7
1.1 Une course vers la H.R.A.	8
1.1.1 Imagerie et pouvoir de résolution angulaire	8
1.1.2 L'atmosphère turbulente	9
1.1.3 Conséquences pour l'imagerie (long temps de pose)	17
1.1.4 Restaurer les limites de la diffraction angulaire	18
1.2 Interférométrie et H.R.A	20
1.3 Problématiques observationnelles	23
1.4 Les guides d'onde en interférométrie	24
1.5 Plan de thèse	26
2 Un Modèle de fibre optique	29
2.1 Filtrage optique monomode	30
2.1.1 Un seul mode ne suffit pas	30
2.1.2 Hypothèses de base	33
2.2 Théorie modale	36
2.3 Le spectre ponctuel	38
2.3.1 Cartes transverses	38
2.3.2 Quantification spectrale	38
2.3.3 Règles de sélection	41
2.3.4 Influence du paramètre de guidage	43
2.3.5 Interprétation physique	46
2.4 Le Continuum spectral	48
2.4.1 Cartes transverses	49
2.4.2 Interprétation physique	52
2.5 Orthonormalisation	52
2.6 Analyse et synthèse modale	60
2.7 Conclusion	63

3	Taux de réjection	65
3.1	Qualité du filtrage modal	65
3.2	Les entrées du modèle	67
3.2.1	Guidage optique monomode	67
3.2.2	Echantillonnage du Continuum	68
3.2.3	Optimisation du couplage monomode	69
3.3	Les sorties du modèle	75
3.3.1	Distribution spectrale	75
3.3.2	Carte d'Intensité	75
3.4	Décomposition des phénomènes	76
3.5	Le flux mesuré	79
3.6	Le taux de réjection	81
3.7	Aberrations statiques	87
3.7.1	Représentation modale	87
3.7.2	Tip-Tilt et Defocus	89
3.7.3	Densités spectrales	90
3.7.4	Chartes de réjection	90
3.8	Conclusion	90
4	Cohérence partielle	95
4.1	Qu'est -ce que la cohérence ?	97
4.2	Les représentations de l'onde lumineuse	98
4.2.1	Représentation harmonique	98
4.2.2	Représentation analytique et enveloppe complexe	99
4.2.3	Ondes aléatoires de puissance moyenne finie	99
4.3	Quantifier la cohérence	100
4.3.1	Fonction de cohérence mutuelle	100
4.3.2	Intensité et intensité mutuelle	101
4.3.3	Degrés de cohérence	101
4.4	Principes interférométriques	102
4.4.1	Théorème de Zernike Van-Cittert quasi-monochromatique	102
4.4.2	Imagerie par synthèse d'ouverture	107
4.4.3	Interférométrie Double-Fourier	109
4.5	Mesures interférométriques	111
4.5.1	Interférométrie par division d'onde	111
4.5.2	Les modes de recombinaison	113
4.5.3	Interférométrie plan-pupille et plan-image	113
4.5.4	Estimateurs de visibilité	115
4.6	Conclusion	116
5	Guidage et Cohérence partielle	119
5.1	Couplage monopupille	121
5.1.1	Modes géométriques	121
5.1.2	Intensité monomode	129
5.1.3	Pupille effective	130

5.1.4	Lobe d'antenne photométrique	132
5.1.5	Section efficace	136
5.1.6	Propagation de la cohérence partielle	137
5.1.7	Influence de la source	139
5.1.8	Influence de la turbulence atmosphérique	140
5.2	Couplage multi-pupilles	147
5.2.1	Intensité mutuelle	147
5.3	Recombinaison coaxiale	149
5.3.1	Pixel To Visibility Matrix	149
5.4	Cohérence partielle	152
5.4.1	Lobe d'antenne interférométrique	152
5.4.2	Propagation de la cohérence partielle	153
5.4.3	Discussion	155
5.5	Vers le Multimode?	156
5.6	Conclusion	159
6	Conclusion	161
	Annexes	164
A	Annexes	165
A.1	Free-space propagation at the output of a SMW	165
A.1.1	Fresnel diffraction of Gaussian beams	165
A.2	beam-collimation	167

Table des figures

1.1	Perspective historique de la haute résolution angulaire.	8
1.2	Modèle d'une couche turbulente fine.	12
1.3	Densité spectrale des fluctuations de phase atmosphérique	14
1.4	Variance des fluctuations de phase atmosphérique.	15
1.5	Fonction de structure avec saturation par échelle externe	16
1.6	Covariance des fluctuations de phase.	17
1.7	Principe de l'imagerie par synthèse d'ouverture.	20
1.8	Inventaire des exoplanètes détectées.	23
1.9	Concepts instrumentaux AMBER/DARWIN.	24
2.1	Table de recombinaison de l'instrument FLUOR.	31
2.2	Injection sur une tête de fibre.	31
2.3	Couplage monomode et turbulence.	32
2.4	Géométrie associée à la fibre circulaire	34
2.5	Géométrie associée au guide planaire	35
2.6	Dégénérescence des polarisations dans l'approximation de guidage faible	36
2.7	Classification spectrale des solutions sur le plan complexe en constante de propagation β	37
2.8	Résolution graphique de l'équation aux valeurs propres pour le guide d'onde planaire	40
2.9	Résolution graphique de l'équation aux valeurs propres pour la fibre circulaire	41
2.10	Etude spectrométrique de la transmission d'un guide droit	42
2.11	Evanescence de gaine des modes guidés du guide planaire.	45
2.12	Evanescence de gaine des modes guidés d'ordre azimutal nul (fibre optique circulaire)	46
2.13	Evanescence de gaine des modes guidés d'ordre azimutal $l = 1$ (fibre optique circulaire)	47
2.14	Evanescence de gaine des modes guidés d'ordre azimutal $l = 2$ (fibre optique circulaire sur la plage $3 \leq V \leq 8$)	48
2.15	Evanescence de gaine des modes guidés d'ordre $l = 2$ guidés par (fibre optique circulaire sur la plage $0 \leq V \leq 2.5$).	49
2.16	Constante de propagation normalisée du mode fondamental b_{01} avec le paramètre de guidage.	50
2.17	Interprétation géométrique des modes guidés et rayonnés par un guide d'onde	52
2.18	Domaine d'intégration pour l'application du théorème de Green	55
2.19	Contour d'intégration pour les modes du guide planaire	57
2.20	Contour d'intégration pour les modes du guide cylindrique	58
2.21	Continuum rayonné excité par une tâche d'airy perturbée.	62

3.1	Carte radiale des modes rayonnés	69
3.2	Caractéristiques géométriques du faisceau Gaussien	71
3.3	Taux de couplage d'une tâche d'Airy idéale	72
3.4	Profil du champ d'excitation	73
3.5	Effet d'un masque de phase sur le taux de couplage.	74
3.6	Distribution spectrale des modes rayonnés. Cas d'une tâche d'airy idéale.	76
3.7	Coupe longitudinale de l'intensité de champ dans la fibre. Cas d'une tâche d'Airy idéale.	77
3.8	Décomposition de l'intensité : phénomène de battement	78
3.9	Evolution du flux intégré dans la zone de transition multimode-monomode pour diverses zones d'intégration.	82
3.10	Taux de réjection dans le cas d'une tâche d'Airy idéale.	84
3.11	Optimum sur la région d'intégration pour le taux de réjection.	86
3.12	Distributions spectrales des modes rayonnés en présence d'aberrations pupillaires.	91
3.13	Aberrations et Taux de réjection : chartes de contour	92
3.14	Simulations RSM	94
4.1	Champ lointain d'un interféromètre.	104
4.2	Champ de vue interférométrique du Corps Noir.	106
4.3	Visibilité du disque de brillance uniforme.	107
4.4	Pouvoir de résolution et résolution angulaire des interféromètres actuels	108
4.5	Efficacité de la clôture de phase en fonction du nombre de télescopes.	109
4.6	Représentation schématique d'une configuration multiaxiale plan-image et coaxiale-plan-pupille	113
5.1	Transformation géométrique du mode fondamental entre la sortie du guide et du détecteur.	122
5.2	Caractéristiques du Faisceau gaussien de sortie d'AMBER.	123
5.3	Collimation et stoppage du faisceau Gaussien.	123
5.4	Pupilles de sortie stoppées.	125
5.5	Mode géométrique imagé.	126
5.6	Optimisation du stop	127
5.7	Approximation gaussienne du faisceau	128
5.8	Pertes photoniques du stop	128
5.9	Geométrie de l'injection sur la tête de fibre.	131
5.10	Pupille effective de l'antenne monomode	132
5.11	Surface effective de l'antenne monomode.	133
5.12	Lobe d'antenne sur le plan de Fourier.	134
5.13	Lobe d'antenne sur le plan image	135
5.14	Taux de couplage idéal	137
5.15	Limitation du champ de vue : Biais sur la visibilité	157

Liste des tableaux

1.1	Liste des interféromètres en fonctionnement.	22
1.2	Interféromètres et instrumentation.	22
2.1	Fréquences de coupure pour les modes guidés du guide d'onde planaire	41
2.2	Racines tabulées des fonctions de Bessel première espèce j_{01}	42
2.3	Fréquences de coupure ordonnées	42
3.1	Paramètres opto-géométriques de la fibre.	68
3.2	Expression analytique des premiers polynômes de Zernike et leur dénomination courante dans la théorie des aberrations optiques.	88
4.1	Estimateurs long-temps de pose, court temps de pose, linéaires et quadratiques	116
5.1	Coefficients d'erreur résiduelle après compensation de N modes de Zernike dans une loi de turbulence de Kolmogorov	143

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement les membres du jury qui ont accepté de rapporter ce document, Stuart Shaklan et Michel Tallon qui par une relecture minutieuse et attentive ont largement contribué à en améliorer la forme et le contenu. Je remercie également Romain Petrov pour avoir examiné ce travail et Pierre Benech à double titre, celui de m'avoir fait l'honneur de présider à la soutenance orale de ce travail, et celui d'avoir guidé mes premiers pas de théoricien néophyte dans ces domaines si passionnants que constituent l'optique guidée ou intégrée.

Je remercie aussi, mes directeurs de thèse Alain, et Fabien, pour le soutien dont ils ont fait preuve à mon égard. Ils ont toujours été à mon écoute, et ont toujours répondu avec patience à toutes mes interrogations intra ou extra professionnelles, dénuées de sens ou non. Merci.

Je remercie aussi, tous les membres du LAOG, pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont réservé au laboratoire, et ce depuis mon stage de DEA : Christian, FaFan, Hélène, Ginette, Richard, Stéphanie (Miss Allobroges), Pierre Kern, Karine, Jean-Philippe, et bien sûr je n'oublierai pas tous les camarades embarqués dans la même "galère" : les magiciens expérimentateurs de l'optique intégrée Pierre, Emmanuel, le futur pro du traitement du signal fibré et électro-acoustique Blind Lemon Eric (Have you ever been to Electric Ladyland, Eric?), le fou furieux de la MHD, des SMAEs et compère de DEA Fabien, ainsi que tous les autres....

Enfin mes remerciements s'adressent en dernier lieu à ma famille, et à mes proches, Isabelle, Mouss & Sandrine, Sophie & Sophie, Steffi & Nat, et à cette bonne vieille branche Fanfouette, sur laquelle on peut toujours s'appuyer en cas de coup dur.

Résumé

L'interférométrie astronomique est une technique observationnelle qui forme des interférences avec le rayonnement d'une source à la sortie de différentes ouvertures indépendantes. L'interférométrie monomode (optique fibrée ou optique intégrée) est une catégorie importante de l'interférométrie pour laquelle les faisceaux se propagent à l'intérieur des guides d'onde, les plus populaires étant les fibres optiques. Les guides d'ondes ne sont pas très bien connus de la communauté astronomique. Ils sont souvent présentés comme des entonnoirs à photons, où le nombre de photons injectés est simplement calculé à partir d'un taux de couplage. Ni la propagation dans la fibre, ni l'effet du guide sur le spectre spatial de la source ne sont considérés. Le but de ce travail est de mieux comprendre comment marche le filtrage optique monomode. Après avoir rappelé pourquoi et dans quel contexte les guides d'ondes ont été introduits en interférométrie, je vais présenter la physique du filtrage modal sous un angle théorique. Une attention particulière sera portée au problème de la normalisation des modes rayonnés dans une structure guidante. Une approche mathématique originale a été développée et permet de calculer les modes rayonnés de n'importe quelle structure multicouche fortement ou faiblement guidante. L'application de la méthode à la fibre optique circulaire bi-couche a permis de calculer la densité spectrale et d'évaluer la réjection des modes rayonnés excités par une tâche d'Airy. Nous montrons que la dynamique de la réjection est rapide mais ralentit dans la longueur du guide. De plus des phénomènes interférentiels entre le mode guidé et le paquet d'ondes rayonnés conduisent à la notion d'optimum local pour la réjection en terme de taille de région d'intégration du flux dans le plan transverse du guide. La seconde partie de ce travail est dédiée à l'étude formelle de la relation objet-image dans un interféromètre fibré. Sur une base mathématique rigoureuse nous étudions comment se propage la cohérence partielle à travers le système optique. Nous montrons que les mesures de visibilité sont biaisées à cause de la réduction du champ de vue induite par la présence des guides.

Abstract

Interferometry is the technique that produces interferences from an astrophysical target between the output of several independent apertures. Interferometry with optical waveguides is one important subclass of interferometry for which the beams propagate in optical waveguides, the most popular ones being optical fibers. Optical waveguides are special optical components which are often not well understood by the astronomical community. They are often presented as a funnel for photons, where the number of injected photons are computed from the injection coupling factor. Neither the propagation inside the waveguide, nor the effect on the spatial spectrum of the input source are considered. The goal of the work presented in this document is to get deeper understanding of how single-mode filtering works. After an introductory chapter recalling why optical waveguides have been introduced into astronomical interferometry, I will present the physics of modal filtering from a theoretical point of view. A special emphasis has been put on the normalization problem of Radiation Modes inside a guiding structure. A new mathematical approach for solving this problem has been derived which can be applied for any number multi-layered strong or weakly guiding dielectric structure. Application of the method to the round optical fiber has led to the computation of the spectral density of power and rejection of radiated modes launched by a perfect or perturbed Airy pattern. It is shown that rejection dynamics is fast at the beginning but slows with the optical path. Furthermore interference phenomena between radiation modes and the fundamental one can locally give rise to an optimum for the rejection in terms of the size to be used for flux integration in the transversal plane of the waveguide. The second part of this work is dedicated to the study of the object image relationship of a fibered interferometer. On a rigorous mathematical basis we study how partial coherence propagates through interferometric combination of single-mode beams in ground-based multi-aperture long-baseline optical interferometers. We show actually that the measured visibility is biased due to field of view limitations.

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Une course vers la H.R.A.	8
1.1.1	Imagerie et pouvoir de résolution angulaire	8
1.1.2	L'atmosphère turbulente	9
1.1.3	Conséquences pour l'imagerie (long temps de pose)	17
1.1.4	Restaurer les limites de la diffraction angulaire	18
1.2	Interférométrie et H.R.A.	20
1.3	Problématiques observationnelles	23
1.4	Les guides d'onde en interférométrie	24
1.5	Plan de thèse	26






LUNETTE DE GALILÉE (1609) DIAMÈTRE : 2 cm RÉSOLUTION : 5" GROSSISSEMENT : $\times 4$	TÉLESCOPE DE NEWTON (1671) DIAMÈTRE : 10 cm RÉSOLUTION : 1" GROSSISSEMENT : $\times 20$	HUBBLE (1990) DIAMÈTRE : 2 m RÉSOLUTION : 0,1" GROSSISSEMENT : $\times 200$	KECK (2000) DIAMÈTRE : 10 m RÉSOLUTION : 0,02" GROSSISSEMENT : $\times 1\,000$	VLT (2003) SÉPARATION : 200 m RÉSOLUTION : 0,001" GROSSISSEMENT : $\times 20\,000$
				

Fig. 1.1 – Perspective historique de la haute résolution angulaire.

1.1 Une course vers la H.R.A.

La quête de très haute résolution angulaire est une recherche permanente en astronomie. Observer à très résolution angulaire c'est être à même de cartographier dans leurs moindres détails les objets astrophysiques qui composent notre univers, c'est donc pouvoir être informé directement sur leur dynamique et sur leur physique. Les pionniers de l'astronomie ont sans doute observé au sol avec l'unique instrument dont ils étaient naturellement pourvus, l'oeil : un instrument imageur monolithique au pouvoir de séparation limité à la seconde d'arc. Le pouvoir séparateur ultime d'un instrument est limité par la diffraction angulaire. De la lunette de Galilée à l'imagerie par synthèse interférométrique d'ouverture, les astronomes ont typiquement gagné globalement facteur 5000 en résolution angulaire dans le visible, c.f. Fig. 1.1.

1.1.1 Imagerie et pouvoir de résolution angulaire

D'un point de vue conceptuel la structure optique des images produite au foyer d'un télescope a largement été étudiée dans la littérature dans le formalisme de l'optique de Fourier. Lorsque le rayonnement imagé est incohérent, l'image produite s'obtient par une convolution angulaire de la distribution de brillance de l'objet par la réponse impulsionnelle de l'instrument. La possibilité même de caractériser l'effet du télescope par une réponse impulsionnelle est une caractéristique essentielle des propriétés de linéarité et d'invariance par translation de l'instrument,

$$I(\alpha) = O(\alpha) \otimes \text{FEP}(\alpha). \quad (1.1)$$

La réponse impulsionnelle ou Fonction d'Étalement de Point FEP, est par essence l'image normalisée en flux produite par l'observation d'un point source, c'est la fameuse tâche d'Airy du télescope de largeur à mi-hauteur $\frac{\lambda}{D}$ à la limite de la diffraction angulaire, où λ désigne la longueur d'onde d'observation et D le diamètre de l'instrument. La relation de convolution exprime le lissage à l'échelle angulaire de la FEP de la distribution de brillance observée. La relation objet-image sur le plan conjugué de Fourier résulte en une multiplication du spectre de l'objet par une fonction de transfert optique, définie comme la paire de Fourier de la FEP,

$$\tilde{I}(\mathbf{f}) = \tilde{O}(\mathbf{f}) \text{FTO}(\mathbf{f}) \quad \text{où} \quad \text{FTO}(\mathbf{f}) = \widetilde{\text{FEP}}(\mathbf{f}), \quad (1.2)$$

\sim désignant ici l'opérateur de transformée de Fourier, \mathbf{f} est la fréquence spatiale optique considérée sur le plan de Fourier. La fonction de transfert optique d'une ouverture est simplement donnée par le produit d'autocorrélation spatiale de sa fonction pupille P exprimée sur le plan des fréquences spatiales optiques,

$$\text{FTO}(\mathbf{f}) = \frac{P(\mathbf{f}) \star P(\mathbf{f})}{\|P\|^2} \quad (1.3)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme induite par le produit scalaire intégral $\langle G|H \rangle = \int G(\mathbf{u})H^*(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$ défini sur le plan des fréquences spatiales, ou *plan de Fourier* par opposition au plan image. Pour une fonction pupille de transmission unitaire, il s'agit de la surface collectrice du télescope exprimée en unité de longueur d'onde au carré,

$$\mathcal{S} = \|P\|^2. \quad (1.4)$$

La fonction pupille d'un télescope est nécessairement à support compact il en va donc de même en ce qui concerne la fonction de transfert optique associée. Cette dernière présente une fréquence spatiale de coupure bien définie. Dans tous les cas la fonction de transfert optique d'une pupille agit comme un filtre passe-bas sur le spectre de l'objet observé. Dans le cas d'une fonction pupille circulaire limitée au diamètre externe D , la fréquence de coupure est $f_c = \frac{D}{\lambda}$. Toute fréquence spatiale supérieure à la coupure est occultée par l'instrument, qui produit donc une image dont la résolution spatiale est limitée par la diffraction angulaire. Le pouvoir résolvant de l'instrument est classiquement défini comme la bande passante du filtre, i.e. relié à sa largeur équivalente :

$$R = \int \text{FTO}(\mathbf{f}) d\mathbf{f} = \frac{|\langle P|1 \rangle|^2}{\|P\|^2}. \quad (1.5)$$

Pour un télescope idéal (sans aberration) de diamètre D , et une fonction pupille à transmission constante sur son support de définition, $|\langle P|1 \rangle| = \|P\|^2 = \mathcal{S}$ et le pouvoir résolvant est donc égal à la surface du télescope exprimée en unités de longueur d'onde au carré,

$$R = \mathcal{S} = \frac{\pi}{4} f_c^2. \quad (1.6)$$

A une longueur d'onde d'observation fixée, l'obtention d'un meilleur pouvoir résolvant passe donc par l'augmentation du diamètre de la pupille d'entrée d'un instrument monolithique. Parallèlement l'obtention d'une plus grande surface collectrice améliore également la *sensibilité* de l'instrument en terme de magnitude limite observable sur le ciel. Ces deux constatations ont conjointement régi les premiers stades du développement instrumental en astronomie. Ainsi de l'oeil est-on progressivement passé à la lunette de Galilée (1610) munie de lentilles minces fonctionnant en transmission, puis à la configuration opto-mécanique du télescope inventé par Newton (1668), remplaçant les lentilles par un jeu de miroirs réflecteurs, et autorisant de fait une augmentation significative de la dimension de la pupille d'entrée de l'instrument.

1.1.2 L'atmosphère turbulente

Néanmoins si la sensibilité d'un instrument varie comme son diamètre collecteur (pour une mesure limitée par le bruit de photons), le pouvoir de résolution sature quant à lui à cause de la turbulence atmosphérique. Il est tout à fait remarquable de constater que Newton avait déjà pris conscience de la dégradation de la qualité optique des images produites au foyer d'un télescope en présence de turbulence atmosphérique. Dans un extrait d'*Opticks* traité publié en 1704, il fournit une description qualitative des effets de la turbulence sur l'image d'une étoile produite au foyer d'un télescope,

For the theory of making telescopes could at length be fully brought into practice, yet there would be certain bounds beyond which telescopes could not perform. For the air through which we look upon the stars, is in a perpetual tremor ; as may be seen by the tremulous motion of shadows cast from high towers, and by the twinkling of the fixed stars. But these stars do not twinkle when viewed through telescopes which have large apertures. For the rays of light which pass through divers parts of the aperture, tremble each of them apart, and by means of their various and sometimes contrary tremors, fall at one and the same time upon different points in the bottom of the eye, and their trembling motions are too quick and confused to be perceived severally. All these illuminated points constitute one broad lucid point, composed of those many trembling points confusedly and insensibly mixed with one another by very short and swift tremors, and thereby cause the star to appear broader and larger than it is, and without trembling of the whole. Long telescopes may cause objects to appear brighter and larger than short ones can do, but they cannot be so formed as to take away that confusion of the rays which arises from the tremor of the atmosphere. The only remedy is a most serene and quiet air, such as may perhaps be found on the tops of the highest mountains above the grosser clouds.

L'atmosphère limite le pouvoir de résolution angulaire des télescopes monolithiques. La turbulence atmosphérique dévie erratiquement le trajet des rayons lumineux sur le plan focal de l'instrument. La tâche de diffraction intégrée en moyenne dans le temps produite est sensiblement élargie. Il faudra cependant attendre trois siècles et les travaux fondamentaux de Kolmogorov pour donner une assise théorique à la description qualitative des phénomènes turbulents, travaux relayés par ceux de Tatarski dans le domaine optique concernant la caractérisation de la propagation du champ électromagnétique en milieu aléatoire inhomogène.

Cette description mathématique de la turbulence atmosphérique fait appel à la théorie des processus aléatoires ergodiques et homogènes de l'espace ainsi qu'au modèle de turbulence développée Kolmogorov [50]. Dans une turbulence pleinement développée au sein d'un fluide, l'énergie cinétique cascade de manière tourbillonnaire, d'échelles spatiales importantes vers des échelles spatiales plus réduites. Ce processus d'écoulement turbulent prend naissance à une certaine échelle spatiale dite échelle externe L_o , lorsque le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement $Re = \frac{VL_o}{\nu_o}$, qui mesure le rapport entre les forces d'inertie et les forces de friction visqueuse excède une certaine valeur critique, typiquement de l'ordre de 2000. Pour l'air, ce nombre de Reynolds est de l'ordre de 10^6 (Roddier [90]), pour une vitesse fluide moyenne de l'ordre de $V_o \simeq 1\text{m/s}$, une échelle externe $L_o = 15\text{m}$, et une viscosité cinématique de $\nu_o = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ soit un facteur mille au dessus du nombre de Reynolds critique. A cette échelle spatiale, un régime d'écoulement laminaire dominé par les forces de viscosité ne peut avoir lieu. L'énergie cinétique est donc transférée de l'échelle externe L_o jusqu'à une certaine échelle spatiale dite échelle interne $l_o \simeq 1\text{mm}$ ou le nombre de Reynolds chutera en dessous de sa valeur critique. A cette échelle spatiale, au contraire, l'énergie cinétique est dissipée sous forme de chaleur par friction moléculaire visqueuse. Le domaine des échelles spatiales comprises entre l'échelle interne et l'échelle externe est appelé domaine inertiel de la turbulence.

Pour que le processus turbulent soit stationnaire, il faut que le taux de production d'énergie cinétique turbulente ϵ soit égal au taux de dissipation d'énergie par frottement visqueux ϵ (supposé constant), à chaque échelle spatiale intermédiaire du domaine inertiel. Ainsi, si δv représente la fluctuation de vitesse à une certaine échelle spatiale L de ce domaine, $\delta t = \frac{L}{\delta v}$ le temps caractéristique de production d'énergie turbulente, alors le taux de production d'énergie cinétique turbulente est pro-

portionnel à $(\frac{\delta v}{L})^3$. Nous trouvons ainsi que les fluctuations de vitesse sont liées à l'échelle spatiale selon la relation,

$$\delta v \propto (\epsilon L)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.7)$$

et les fluctuations d'énergie cinétique,

$$(\delta v)^2 \propto (\epsilon L)^{\frac{2}{3}} \quad (1.8)$$

Ces relations permettent de trouver la dépendance de la densité spectrale mono-dimensionnelle des fluctuations d'énergie cinétique en termes du nombre d'onde spatial $\kappa = \frac{2\pi}{L}$ dans le domaine inertiel de la turbulence. Cette densité spectrale d'énergie cinétique $W_E(k)$ est donc,

$$\begin{aligned} W_E(\kappa) d\kappa &\propto (\delta v)^2 \propto \kappa^{-\frac{2}{3}} \\ \text{ou} \\ W_E(\kappa) &\propto \kappa^{-\frac{5}{3}} \\ \frac{2\pi}{L_o} &< \kappa < \frac{2\pi}{l_o}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

C'est la fameuse *loi de turbulence de Kolmogorov*, valable sur tout le domaine inertiel de la turbulence.

Fluctuations d'indice optique

Le mélange turbulent d'air provenant de différentes altitudes engendrent des fluctuations de température atmosphérique dont la densité spectrale de puissance suit aussi une loi de type Kolmogorov (Obukhov [73], Yaglom [109]). Ces fluctuations de température induisent à leur tour des fluctuations d'indice optique, dont la densité spectrale de puissance tri-dimensionnelle est encore donnée par une loi de Kolmogorov, dans un certain domaine inertiel de turbulence isotrope (Tatarski [104]),

$$\begin{aligned} W_n(\kappa) &= 0.033 C_n^2 \kappa^{-\frac{11}{3}} \\ \frac{2\pi}{L_o} &< \kappa < \frac{2\pi}{l_o}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Les échelles interne et externe des fluctuations d'indice optique sont du même ordre de grandeur que celles des fluctuations d'énergie cinétique. C_n^2 est la *constante de structure* des fluctuations de l'indice de réfraction. Elle mesure la force de la turbulence dans l'altitude. Un profil moyen de la constante de structure dans l'altitude est connu sous le nom de profil de Hufnagel (Hufnagel [44]). En dehors du domaine inertiel, la densité spectrale de puissance des fluctuations d'indice optique est décrite par certains auteurs (Tatarski [104]) qui proposent une coupure exponentielle de la fonction au delà du nombre d'onde $\kappa_c = \frac{5.92}{l_o}$. La loi de puissance de Kolmogorov s'éteint aux petites échelles spatiales, à partir d'une échelle caractéristique dite *échelle interne* l_o . D'autres auteurs (Strohbehn [101]) décrivent une saturation d'origine physique de la fonction aux basses fréquences spatiales, en dessous du nombre d'onde $\kappa_o = \frac{2\pi}{L_o}$. Cette saturation permet aussi d'éviter la divergence du spectre de Kolmogorov à l'origine des nombres d'ondes spatiaux. En combinant ces deux dépendances, la loi de turbulence étendue sur tout le domaine spectral est dite *loi de turbulence de Von-Karman*,

$$W_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_o^2)^{-\frac{11}{6}} \exp(-\frac{\kappa^2}{\kappa_c^2}) \quad (1.11)$$

La loi de turbulence de Kolmogorov apparaît numériquement comme un cas particulier de la loi de turbulence de Von-Karman, pour laquelle l'échelle interne serait nulle et l'échelle externe serait infinie.

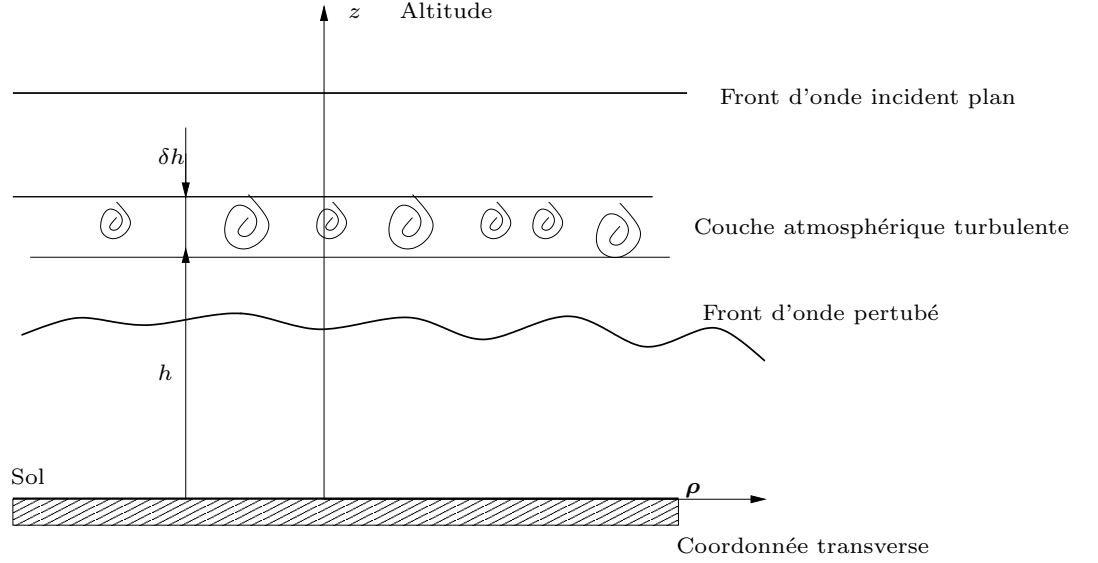


Fig. 1.2 – Modèle d'une couche turbulente fine.

Dans la plupart des problèmes de propagation en milieu aléatoire, c'est la *fonction de structure* isotrope des fluctuations d'indice qui est mise en jeu, calculable quelle que soit la loi de turbulence utilisée sous la forme,

$$D_n(\rho) = \langle [n(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) - n(\mathbf{r})]^2 \rangle = 8\pi \int \kappa^2 W_n(\kappa) [1 - \sin \frac{\kappa \rho}{\kappa \rho}] d\kappa. \quad (1.12)$$

Elle dépend donc peu du comportement de la densité spectrale aux basses fréquences spatiales (multiplication de cette dernière par un filtre passe-haut dans l'intégrande précédente) et reste bien définie, y compris pour une loi de type Kolmogorov. Dans ce dernier cas, elle a en plus une expression analytique bien connue :

$$D_n(\rho) = C_n^2 \rho^{\frac{2}{3}}. \quad (1.13)$$

La forme analytique de cette fonction de structure, n'est valable que dans le domaine inertiel de la turbulence, $\rho \in [l_o, L_o]$.

Fluctuations de phase atmosphérique

En suivant l'analyse de Roddier [90], dans l'hypothèse de *champ proche*, la scintillation atmosphérique (fluctuations d'amplitude du champ optique perçu au sol) peut-être négligée et la turbulence induit seulement des erreurs de phase aléatoires sur la pupille d'entrée chargée de collecter la lumière stellaire. Considérons le cas de la traversée d'une couche turbulente d'épaisseur δh . La perturbation de phase ϕ bi-dimensionnelle accumulée par le signal stellaire est reliée aux fluctuations d'indice n optique par l'intégrale,

$$\phi(\mathbf{x}) = k \int_{[h, h+\delta h]} n(\mathbf{x}, z) dz. \quad (1.14)$$

\mathbf{x} est une coordonnée transverse décrivant la surface de la couche turbulente c.f. Fig.1.2. Les fluctuations d'indice optique de la couche traversée étant en première approximation achromatiques (Goodman [38]), il en va de même en ce qui concerne la différence de marche optique. En revanche la perturbation de phase accumulée est inversement proportionnelle à la longueur d'onde du signal stellaire considéré. En supposant que l'épaisseur de la couche turbulente traversée est grande devant la

longueur de corrélation spatiale typique des fluctuations d'indice optique, on déduit de la relation précédente que la phase atmosphérique suit une statistique gaussienne (Théorème statistique central). On déduit aussi la fonction de covariance *bi-dimensionnelle* de la phase atmosphérique sous la forme intégrale,

$$B_\phi(\boldsymbol{\rho}) = \langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}) \rangle = k^2 \delta h \int B_n(\boldsymbol{\rho}, z) dz, \quad (1.15)$$

où B_n est la covariance spatiale *tri-dimensionnelle* des fluctuations d'indice optique, formant une paire de Fourier tri-dimensionnelle de la densité spectrale associée (Théorème de Wiener-Kinchine),

$$B_n(\boldsymbol{\rho}, z) = \int W_n(\boldsymbol{\kappa}) \exp i\boldsymbol{\kappa} \cdot (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{z}) d\boldsymbol{\kappa}. \quad (1.16)$$

La fonction de covariance bi-dimensionnelle des fluctuations de phase est définie formant une paire de Fourier bi-dimensionnelle avec la densité spectrale associée,

$$B_\phi(\boldsymbol{\rho}) = \int W_\phi(\boldsymbol{\kappa}) \exp i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} d\boldsymbol{\kappa}. \quad (1.17)$$

La combinaison de cette relation avec les deux précédentes permet d'évaluer la densité spectrale bi-dimensionnelle isotrope des fluctuations de phase sous la forme,

$$W_\phi(\kappa) = 2\pi W_n(\kappa) = 0.207k^2 \delta h C_n^2(\kappa^2 + \kappa_o^2)^{-\frac{11}{6}}. \quad (1.18)$$

où l'on a utilisé la loi de turbulence de Von-Karman des fluctuations d'indice optique pur passer de la première à la seconde égalité. Enfin en introduisant r_o le *paramètre de Fried* [33, 34] défini pour la traversée d'une onde plane à travers un layer turbulent observé au zénith,

$$r_o = 0.423k^2 \delta h C_n^2(h)^{-\frac{3}{5}} \quad (1.19)$$

il vient,

$$W_\phi(\kappa) = 0.492 r_o^{-\frac{5}{3}} (\kappa^2 + \kappa_o^2)^{-\frac{11}{6}}. \quad (1.20)$$

La loi de turbulence *bi-dimensionnelle* des fluctuations de phase atmosphérique est de type Von-Karman. Elle est paramétrée par trois échelles spatiales, l'échelle correspondant au paramètre de Fried r_o , l'échelle externe de la turbulence L_o et l'échelle interne l_o . La loi de turbulence de Kolmogorov apparaît, là encore, comme un cas particulier de celle de Von-Karman, c'est à dire pour une échelle interne nulle et à la limite d'une échelle externe infiniment grande. Dans la suite, nous négligerons l'effet de l'échelle interne de la turbulence sur les fluctuations de phase en supposant qu'elle est nulle. L'ensemble des résultats précédents peut être généralisé au cas d'un modèle continu de turbulence dans l'altitude et d'une observation à un certain angle zenithal ξ non nul. L'extension au modèle continu ne modifie pas la dépendance de la densité spectrale vis à vis des trois échelles spatiales caractéristiques, mais conduit à une redéfinition de ces dernières intégrant le profil de turbulence de Hufnagel et de l'échelle externe, dans l'altitude,

$$r_o = 0.423k^2 \sec(\xi) \int \delta h C_n^2(h)^{-\frac{3}{5}} \\ L_o = \frac{\int \mathcal{L}_o^{-\frac{1}{3}}(h) C_n^2(h) \delta h}{\int C_n^2(h) \delta h}, \quad (1.21)$$

où $\mathcal{L}_o(h)$ est le profil géophysique local de l'échelle externe (Ziad, Bornino, Martin, & Agabi [111]). Des mesures de ce profil à différentes altitudes ont été réalisées par Coulman, Vernin, Coqueugniot,

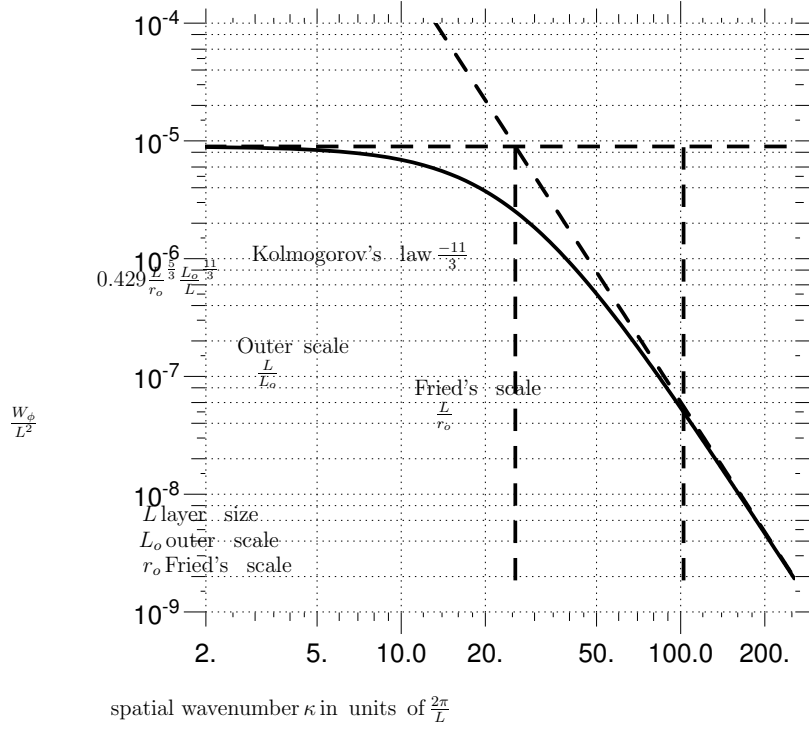


Fig. 1.3 – Densité spectrale de puissance des fluctuations de phase atmosphérique définies pour une couche turbulente carrée de dimension L en fonction du nombre d'onde (échelle log-log). La densité spectrale est adimensionnée à la surface du layer turbulent. L'échelle externe est ici $L_o = L/8$ et le paramètre de Fried vaut $r_o = L/100$. La variance statistique de la phase est $\sigma_\phi^2 = 18.7 \text{ rad}^2$.

& Caccia [23]. L'échelle externe locale varie fortement avec l'altitude atteignant une valeur de 5 m à une altitude de 7.5 km. La taille de l'échelle externe au sol, intégrée sur le profil de turbulence est sujette à beaucoup de discussions et semble indubitablement varier assez significativement d'un site observationnel à un autre sur une plage de valeurs atteignant quelques mètres à quelques centaines de mètres. Le seeing r_o dépend de la longueur d'onde du rayonnement perçu à la puissance $\lambda^{6/5}$. Sa valeur est souvent spécifiée à $0.5 \mu\text{m}$ longueur d'onde pour laquelle il varie typiquement de 5 cm de jour et en conditions de forte turbulence à 20 cm, la nuit et dans de bonnes conditions d'observation. Le seeing “moyen” se situe typiquement dans l'intervalle $[7 - 12] \text{ cm}$, (Hardy [42]).

Propriétés statistiques de la phase atmosphérique

Lorsque l'on suppose une échelle de turbulence interne nulle, la variance statistique des fluctuations de phase atmosphérique peut être calculée analytiquement par une intégration de la densité spectrale de puissance,

$$\sigma_\phi^2 = B_\phi(\mathbf{0}) = \int W_\phi(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} = 1.855 (\kappa_o r_o)^{-5/3} = 1.855 \frac{L_o^{5/3}}{r_o} \quad (1.22)$$

Elle est limitée par l'échelle externe de la turbulence et diverge à l'infini pour une loi de turbulence de Kolmogorov. La surface équivalente sous la fonction de covariance normalisée permet de définir une aire de corrélation A_ϕ et une longueur de corrélation L_ϕ spatiales caractéristique pour les

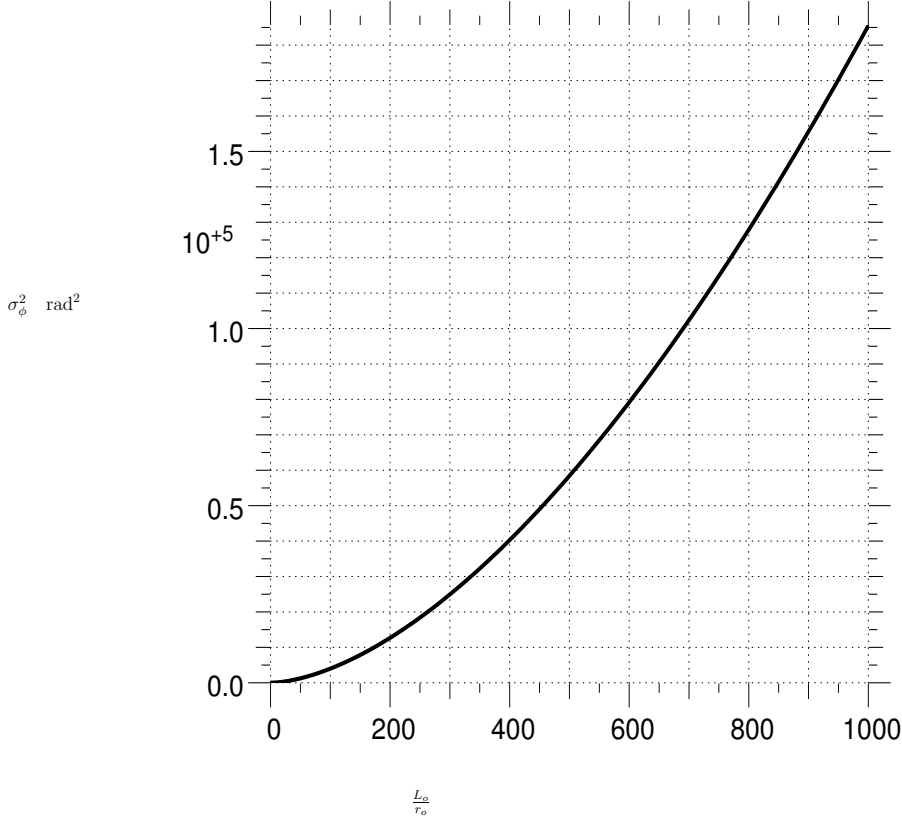


Fig. 1.4 – Variance statistique des fluctuations de phase atmosphérique, pour une loi de turbulence de type Von-Karman en fonction du rapport échelle externe sur paramètre de Fried.

fluctuations de phase atmosphérique,

$$A_\phi \equiv \int \frac{B_\phi(\boldsymbol{\rho})}{B_\phi(\mathbf{0})} d\boldsymbol{\rho} = \frac{W_\phi(\mathbf{0})}{\int W_\phi(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}} = 0.265 \kappa_o^{-2} \propto L_o^2 \quad (1.23)$$

L'échelle externe L_o est une mesure théorique *conventionnelle* de la longueur de corrélation de la phase turbulente. Lorsque l'on calcule la fonction de covariance normalisée par transformée de Fourier numérique d'une loi de Von-Karman, on s'aperçoit qu'elle reflète bien la longueur de corrélation caractéristique du processus aléatoire au sens de la propriété de décorrélation $B_\phi(\rho) = 0 \quad \forall \rho > L_o$, c.f. Fig.1.6. Nous retiendrons donc l'échelle externe comme une mesure de la longueur de corrélation typique des fluctuations de phase atmosphérique. Dans une turbulence de type Kolmogorov, la longueur de corrélation de la phase atmosphérique est infinie. Cette longueur de corrélation est indépendante du paramètre de Fried r_o .

Fluctuations de champ proche optique

De manière analogue aux fluctuations d'indice optique, on peut caractériser les fluctuations de phase aléatoires par leur *fonction de structure* définie par,

$$D_\phi(\rho) = \langle [\phi(r+\rho) - \phi(r)]^2 \rangle = 2(\sigma_\phi^2 - B_\phi(\rho)) = 4\pi \int \kappa [1 - J_o(\kappa\rho)] W_\phi(\kappa\rho) d\kappa. \quad (1.24)$$

Cette fonction sature à la valeur $2\sigma_\phi^2$ au delà de l'échelle externe. On peut noter que la fonction de covariance normalisée ne dépend pas du paramètre de Fried r_o mais uniquement de l'échelle externe

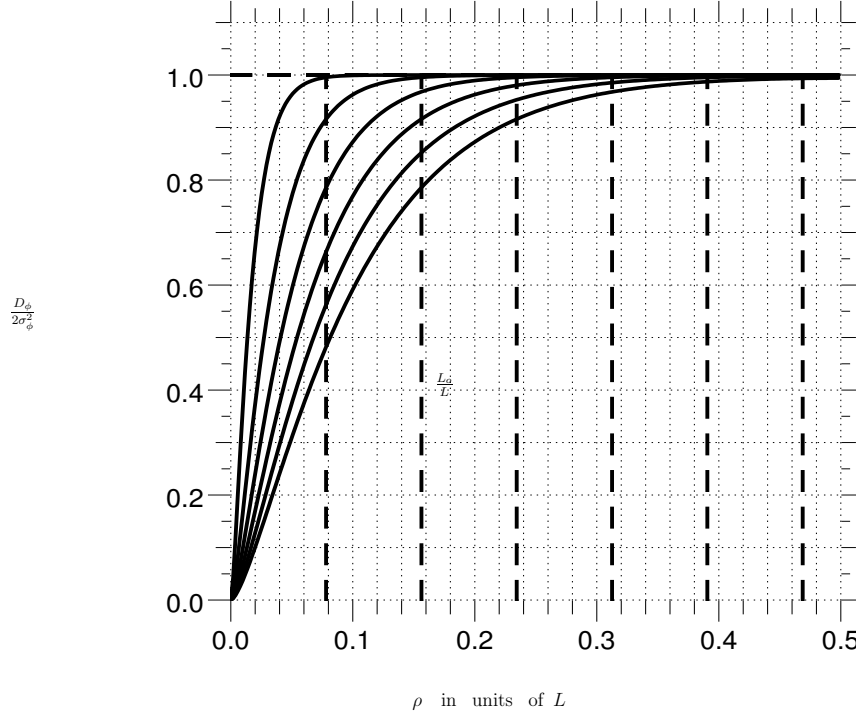


Fig. 1.5 – Fonctions de structure $D_\phi(\rho)$ normalisées à leur maximum $2\sigma_\phi^2$ pour diverses valeurs de l'échelle externe L_o traits pointillés.

L_o . Il en est de même en ce qui concerne la fonction de structure des fluctuations de phase normalisée à son niveau de saturation $2\sigma_\phi^2$, i.e., $\frac{D_\phi(\rho)}{2\sigma_\phi^2} = (1 - \frac{B_\phi(\rho)}{B_\phi(0)})$. Ces fonctions sont illustrées sur les figures, Fig.1.6 et Fig.1.5. On obtient des tracés de la covariance et de la fonction de structure évolutifs avec l'échelle externe L_o , indépendamment de la valeur intrinsèque du paramètre de Fried r_o et de celle de la variance statistique σ_ϕ^2 . Les fonctions sont calculées par transformée numérique de la loi de Von-Karman pour une couche turbulente de taille carrée finie L . Pour des raisons d'échantillonnage correct du spectre de Von-Karman aux basses fréquences spatiales, l'échelle externe L_o ne peut excéder la valeur limite $\frac{L}{2}$, faute de quoi les courbes obtenues perdent leur sens. Pour une densité spectrale de puissance de type Kolmogorov, la variance statistique des fluctuations de phase diverge à l'infini, mais la fonction de structure de phase, peu dépendante de la divergence de la densité spectrale de puissance aux basses fréquences spatiales, reste bien définie et calculable analytiquement (Roddier [90]),

$$D_\phi(\rho) = \langle (\phi(r + \rho) - \phi(r))^2 \rangle = 6.88 \left(\frac{\rho}{r_o} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.25)$$

La fonction de structure de phase est une grandeur de première importance dans la plupart des applications courantes, car c'est elle qui fournit la fonction de covariance du *champ optique* associé aux fluctuations de phase atmosphérique et l'échelle de corrélation spatiale associée. En effet, dans l'hypothèse de champ proche, le champ optique atmosphérique est simplement le phaseur pur associé aux perturbations de phase,

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \exp i\phi(\boldsymbol{\rho}). \quad (1.26)$$

Les fluctuations de phase suivant une statistique gaussienne, le champ suit une statistique log-normale. La confirmation observationnelle de cette statistique a été obtenue par Sibille, Chelli, & Lena [96]. La

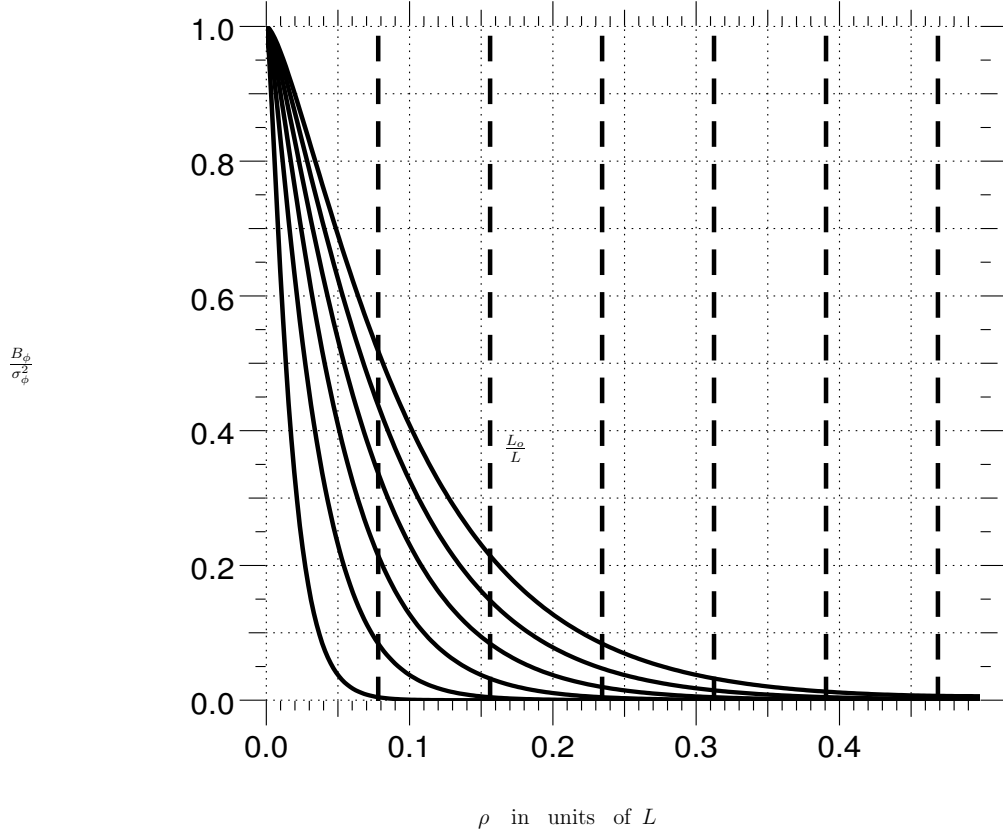


Fig. 1.6 – Covariance normalisée des fluctuations de phase atmosphérique. Les tracés sont obtenus pour diverses valeurs de l'échelle externe L_o (traits pointillés).

fonction de covariance du champ optique atmosphérique, ou *fonction de transfert atmosphérique* est donnée par (Roddier [90]),

$$B_\psi(\boldsymbol{\rho}) = \exp(i\phi(\boldsymbol{\rho})) = \exp -\frac{1}{2}D_\phi(\boldsymbol{\rho}). \quad (1.27)$$

dont l'aire et la longueur de cohérence caractéristiques sont définies arbitrairement par,

$$A_\psi = \int B_\psi(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \equiv \pi r_\psi^2 \quad (1.28)$$

En choisissant la fonction de structure de phase dans une turbulence de Kolmogorov, on a $r_\psi = r_o$, qui par définition ([33]), renvoie une mesure de la longueur de corrélation caractéristique du *phaseur atmosphérique* dans une turbulence de type Kolmogorov, et non de la phase elle-même¹.

1.1.3 Conséquences pour l'imagerie (long temps de pose)

Les fluctuations de champ proche intégrées dans un temps d'intégration long devant le temps de cohérence des fluctuations l'atmosphère, induisent une FTO moyenne, qui s'obtient par multiplication de la FTO idéale avec une *fonction de transfert atmosphérique*

$$\langle \text{FTO}(\mathbf{f}) \rangle = \text{FTO}(\mathbf{f}) B_{\text{atm}}(\mathbf{f}), \quad (1.29)$$

¹En toute rigueur, le paramètre de Fried ne mesure donc pas exactement la longueur de corrélation du phaseur atmosphérique dans une loi de turbulence de type Von-Karman. Cette longueur dernière devrait suivre une loi générale du type $r_\psi(l_o, L_o)$ telle que $r_\psi = (0, L_o \rightarrow \infty) = r_o$.

où $\langle . \rangle$ désigne une moyenne d'ensemble, la fonction de transfert atmosphérique n'est autre que la fonction de transfert optique du télescope qui n'est autre que la fonction,

$$B_{\text{atm}}(\mathbf{f}) \equiv B_{\psi}(\boldsymbol{\rho} = \lambda \mathbf{f}). \quad (1.30)$$

La fonction de transfert optique moyenne ne coupe plus à une fréquence de coupure f_c limitée par la diffraction mais a une fréquence de coupure inférieure limitée par l'atmosphère $f_o = \frac{r_o}{\lambda}$. Il s'ensuit donc une perte de pouvoir résolution du système instrumental global (atmosphère + télescope), le pouvoir de résolution "moyen" pouvant être mesuré sur la base de la largeur équivalente de la FTO "long temps de pose". Aux grands rapports $\frac{D}{r_o}$ ce dernier sera limité par le pouvoir résolvant de l'atmosphère, $R \simeq R_{\text{atm}}$.

$$R_{\text{atm}} = \int B_{\text{atm}}(\mathbf{f}) d\mathbf{f} = \pi \frac{r_o^2}{\lambda^2} \quad (1.31)$$

Historiquement le diamètre du miroirs primaires des télescopes n'a eu de cesse d'augmenter, pour atteindre des dimensions de l'ordre de la dizaine de centimètres dans le visible, valeur critique correspondant la taille d'une cellule de cohérence du phaseur atmosphérique ("un r_o "). Au delà de cette dimension critique, le pouvoir de résolution de l'instrument est entièrement limité par l'atmosphère.

1.1.4 Restaurer les limites de la diffraction angulaire

On peut s'affranchir de la turbulence atmosphérique en envoyant les télescopes dans l'espace, c'est ce qui a été entrepris dans les années 1990, avec le télescope spatial Hubble. Il s'agit d'un remède onéreux (eu égard au coût de la satellisation et de la maintenance technique dans l'espace). D'autre part, la charge utile et l'encombrement réduit de la coiffe d'un lanceur ou de la navette spatiale mettent un frein aux projets monolithiques de grande envergure.

Les astronomes n'ont donc pas attendu les missions spatiales pour mettre au point des techniques instrumentales leur permettant de restaurer les limites de la diffraction angulaire. La technique d'*interférométrie des tavelures*, initialement introduite par Labeyrie [51] permet de restaurer la densité spectrale de puissance de l'objet sur une plage de fréquences spatiales optiques supérieures à la fréquence de coupures du seeing. Cette méthode consiste à former des images court temps de pose, et à moyenner leur densités spectrales. Cette approche quadratique permet en effet de geler les effets destructifs de la phase atmosphérique conduisant à la formation d'un Halo étendu dans la FEP long temps de pose. L'inconvénient majeur de l'analyse quadratique est sans doute la perte de l'information de phase sur le spectre de l'objet, information nécessaire pour reconstruire l'image observée.

Sur une idée de originelle de Babcock [4] consiste à utiliser un système d'*optique adaptative* permettant une compensation en temps réel, et à l'aide d'un miroir déformable, des déformations du front d'onde stellaire. Un système d'optique adaptative est classiquement constitué de trois sous-systèmes : un miroir déformable, un analyseur de surface d'onde et un calculateur en temps réel. La lumière réfléchi par le miroir primaire du télescope illumine d'abord sur le miroir déformable qui pratique la compensation du front d'onde. Une partie de la lumière réfléchi est envoyée vers la caméra d'imagerie scientifique, l'autre est envoyée sur une voie d'analyse où se situe le senseur de front d'onde mesurant l'erreur de front d'onde résiduelle post-correction. Le calculateur interprète l'erreur résiduelle en terme de commandes à appliquer aux actuators du miroir déformable, pour réajuster, via une boucle d'asservissement, la surface de ce dernier au front d'onde incident modifié par l'évolution temporelle de la turbulence atmosphérique. L'introduction de systèmes adaptatifs permet de stabiliser la réponse impulsionnelle du télescope, en restaurant *partiellement* la limite de la diffraction angulaire.

Succinctement on peut dire que l’optique adaptative produit une fonction de structure des fluctuations de phase résiduelle, équivalente à la fonction de structure non corrigée mais dont le paramètre de Fried a été augmenté. La fonction de structure sature au double de la variance résiduelle de phase, au delà d’une distance typique de décorrélation de la phase résiduelle (analogue de l’échelle externe de la turbulence sans correction) qui est de l’ordre de grandeur de la distance typique inter-actuateurs du miroir déformable, Conan [18]. La structure optique de l’image long-temps de pose après correction est toujours décomposable en un pic cohérent et un halo étendu d’amplitude amoindrie par rapport au cas purement turbulent (restauration de l’énergie cohérente par diminution de la variance de la phase résiduelle) et le front d’onde corrigé possède une longueur de corrélation ρ_o (analogue au r_o sans correction) qui dépend du degré de la correction adaptative (Cagigal & Canales [12]).

Les possibilités de retrouver de la résolution angulaire par un traitement de signal (interférométrie des tavelures) et des techniques instrumentales (optique adaptative) appropriés ont relancé l’intérêt pour des projets instrumentaux incluant des pupilles de grande dimension. C’est dans un tel contexte qu’est récemment apparue une nouvelle classe de télescope, celles des télescopes géants dont les représentants actuels sont le Keck Telescope ou le Very Large Telescope, et dont les unités ont des dimensions pupillaires avoisinant la dizaine de mètres. Cependant l’accès à des tailles encore plus grandes semble présenter des contraintes techniques infranchissables dans un avenir proche (10 à 20 ans). Une première alternative intéressante consiste à développer des télescopes à miroirs liquides (Poels et al. [82], Borra [11]), même si cette technique est assez difficile à mettre en oeuvre, lors d’un suivi dynamique des astres pendant leur course dans le ciel nocturne.

Partant du constat que la formation d’image au foyer d’un télescope est un processus interférométrique par essence, certains chercheurs ont développé une autre alternative qui consiste à synthétiser artificiellement une pupille monolithique en recombinaison des faisceaux lumineux en provenance d’un réseau de petites ouvertures individuelles de dimensions plus réduites, c.f. Fig. 1.7. Cette technique appelée *imagerie par synthèse d’ouvertures* permet d’échantillonner le spectre de la source lumineuse observée, en module et en phase, et ce diverses à fréquences spatiales, chaque paire de pupilles individuelles échantillonnant une fréquence donnée. L’image produite en recombinaison une paire d’ouvertures livre donc une figure d’interférences, analogue aux franges d’Young dont le contraste est directement liée à la densité spectrale de l’objet (définie comme sa *visibilité*) tandis que la phase est liée à la position des franges sur le détecteur². En assurant une couverture du plan des fréquences spatiales suffisamment dense, on peut ainsi reconstruire une image limitée par la diffraction à une résolution angulaire, donnée par la distance inter-pupilles la plus grande.

On peut donc espérer que les générations futures observeront de façon routinière à l’aide de réseaux de télescopes dilués dans l’espace sur plusieurs centaines de mètres ou de kilomètres. De plus, elles observeront sûrement dans un premier temps des franges d’interférences à partir desquelles ils pourront ensuite reconstruire des images à des résolutions angulaires atteignant quelques milli ou micro secondes d’arc. Quel schéma d’évolution darwinienne a-t-il conduit les astronomes du statut d’homo-occulus à celui d’homo-interferometricus ?

²Pour mieux “visualiser” l’information de phase, nous situons le propos, à ce stade de la discussion, dans le cas d’un codage spatial et non temporel des franges d’interférences sur le détecteur.

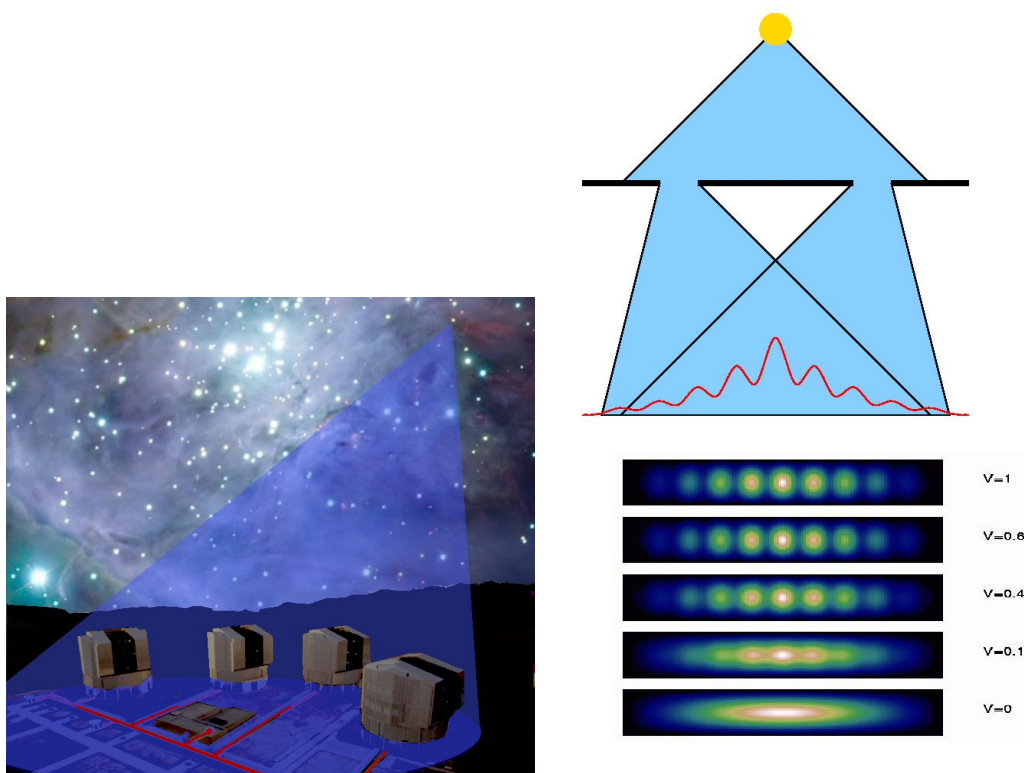


Fig. 1.7 – Principe de l'imagerie par synthèse d'ouverture.

1.2 Interférométrie et H.R.A

L'histoire de l'interférométrie astronomique débute en France en 1867. Fizeau [28] fut le premier astronome à saisir conceptuellement le lien existant entre le contraste de franges d'interférence imagées au foyer d'un télescope et la dimension angulaire de la source qui les produit. Il proposa donc d'apposer sur la pupille d'entrée d'un télescope un masque d'ouvertures permettant de réaliser des mesures interférométriques de diamètres stellaires. Cette nouvelle méthode expérimentale fut validée sur le ciel par Stephan [98]. La configuration pupillaire testée sur le télescope de 80 cm de diamètre de Marseille comprenait des ouvertures espacées de 50 cm. Toutefois le masque utilisé fut insuffisant pour résoudre angulairement la plupart des étoiles observées (à l'exception de Sirius), et il dut en conclure "*Sur l'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes.*"

C'est en 1921 seulement Michelson [68] qu'A. Michelson reprit l'idée de Fizeau à son compte, en jetant les bases du formalisme interférométrique et en établissant clairement le lien existant entre la visibilité des franges d'interférence et le diamètre d'un disque de brillance uniforme. Il réalisa pour la première fois avec F. Pease une mesure de diamètre stellaire à l'aide d'un interféromètre construit pour l'occasion à l'observatoire du Mont Wilson, Michelson [69]. L'apport technologique majeur fut de procéder par recombinaison de faisceaux issus de miroirs individuels montés sur une poutrelle métallique, cette dernière étant arrimée à une monture de télescope classique, plutôt que par apposition d'un masque d'ouverture sur une pupille unique. Ce procédé lui permit d'atteindre une longueur de base entre pupilles de 20 pieds (6,1 m). A ce stade du développement de l'interférométrie, on ne peut toutefois pas encore parler de synthèse d'ouvertures réellement indépendantes (en tous cas pas au sens

mécanique du terme). Le concept optique proposé par Michelson s'apparente à un masque pupillaire, où les miroirs jouent un rôle équivalent aux fentes. Pease [78] fait état d'un système permettant d'atteindre une longueur de base de 50 pieds (15,24 m). Mais les limitations qui survinrent alors furent d'ordre mécanique (mauvais-contrôle des vibrations des structures porteuses), et elles rendirent le système peu exploitable. L'expérience n'eut malheureusement pas de suite immédiate.

Pour autant cet échec ne sonna pas le glas de l'interférométrie astronomique. Ainsi en 1974, cette dernière renaît-elle de ses cendres avec la première recombinaison de faisceaux provenant cette fois de deux pupilles réellement indépendantes, Labeyrie [52]. Depuis les travaux d'Antoine Labeyrie sur I2T, l'interférométrie astronomique s'est largement internationalisée, et un grand nombre d'interféromètres à 2 voies ont vu le jour (PTI, IOTA/FLUOR....). Le passage d'une recombinaison interférométrique à plus de deux télescopes est aujourd'hui crucial pour l'imagerie par synthèse d'ouverture, rendue possible via la technique dite de clôture de phase. Les premières mesures du terme de clôture avec plus de deux ouvertures ont été obtenues grâce à des masques pupillaires, Baldwin et al. [6]. La transposition de cette technique à trois télescopes réellement indépendants n'a été réalisée que récemment par deux interféromètres astronomiques COAST (Cambridge Optical Aperture Synthesis Telescope, Baldwin et al. [7]) et NPOI (Navy Prototype Optical Interferometer, Benson et al. [8]). Les tableaux Tab. 1.2 et Tab. 1.1 dressent une liste non exhaustive des interféromètres actuels avec leurs principales caractéristiques instrumentales.

Cette classification met en relief des concepts instrumentaux interférométriques qui sont sans commune mesure avec les précédents ; Ces concepts, voyant le jour en cette fin de siècle, reposent sur la recombinaison interférométrique des lumières issus de télescopes "géants" tels que le VLT ou le Keck, dont l'émergence, nous l'avons vu, est étroitement liée aux formidables progrès réalisés e par l'optique adaptative, lors de cette dernière décennie .

En effet, jusqu'à la fin du millénaire, la plupart des interféromètres astronomiques opérant en grande majorité dans l'infra-rouge et le proche infra-rouge, ont des dimensions pupillaires raisonnables adaptées au diamètre du seeing sur cette plage de longueur d'onde. Même si la synthèse interférométrique d'ouverture permet de restaurer la limite de résolution angulaire d'un télescope dont le diamètre serait égal à la plus grande ligne de base de l'interféromètre, il n'en reste pas moins que la turbulence atmosphérique continue de dégrader la qualité du signal interférométrique, y compris pour des pupilles de dimensions modestes devant le r_o . La phase varie de manière aléatoire sur chacune des sous-pupilles constitutives du réseau interférométrique, dans un temps de cohérence qui est typiquement de l'ordre de la dizaine de milliseconde dans l'infrarouge, une propriété déduite d'un modèle "dynamique" utilisant l'hypothèse de Taylor dite de *turbulence gelée*³ largement utilisé pour décrire son évolution temporelle. Ces variations de phase dégradent le contraste franges d'interférences et le rapport signal sur bruit sur la visibilité de l'objet estimée à partir des mesures. C'est pourquoi les interféromètres, même de dimension modeste, sont munis de systèmes de correction adaptative aux performances limitées, dédiées surtout au contrôle des aberrations de premier ordre (contrôle du tip-tilt atmosphérique). La recombinaison interférométrique des télescopes géants requiert quant à elle une correction adaptative partielle plus complexe à des ordres de correction plus élevés.

Dans les deux cas (petites ou grandes pupilles) il est aussi nécessaire de geler *le piston différentiel* entre les faisceaux interférés. Cette différence de phase constante sur chacune des ouvertures, est la cause principale de la perte du signal interférométrique. Ce déphasage erratique modifie la position

³Hypothèse selon laquelle les couches d'air turbulentes se déplacent "en bloc" selon une vitesse hydrodynamique moyenne devant la pupille d'entrée de l'instrument. Le spectre de puissance spatial des fluctuations de phase atmosphérique peut alors être converti en spectre temporel.

Tab. 1.1 – Liste des interféromètres en fonctionnement.

	Nbre de télescopes	Φ	B_{max}	ref.
GI2T (FR)	2	1.52 m	12 - 65 m	[70]
ISI (USA)	2	1.65 m	4 - 65m	[106]
SUSI (AUS)	2	0.14 m	5 - 640 m	[24]
PTI (USA)	2	0.40 m	110 m	[16]
IOTA (USA)	3	0.45 m	5 - 38 m	[107]
FLUOR/TISIS - IOTA (FR/USA)	2	0.45	5 - 38 m	[67]
COAST (UK)	4	0.40 m	5 - 48 m (100 m)	[110]
NPOI (USA)	3	0.35 m	2 - 437 m	[3]
CHARA (USA)	6	1 m	350 m	[56]
Keck Interferometer, KI (USA)	2 / 4	10 m / 1.8 m	85 m / 25 - 140 m	[15]
VLTI (Eur)	4 / 3	8 m / 1.8 m	130 m / 8 - 200 m	[37]

Tab. 1.2 – Interféromètres et instrumentation.

	λ	mode	état
GI2T	0.4 - 2.5 μm		depuis 1985
ISI	9 - 12 μm		depuis 1990
SUSI	0.4 - 0.9 μm		depuis 1991
PTI	1.5 - 2.4 μm	astrométrie	depuis 1995
IOTA	V,R,I,J,H,K		depuis 1993 (2T)
FLUOR/TISIS - IOTA	K,L		depuis 1995
COAST	0.65 - 1 μm / 1.3 - 2.2 μm	imagerie	depuis 1991
NPOI	0.45 - 0.85 μm	imagerie	depuis 1995
CHARA	0.45 - 2.4 μm		premières franges en 1999
KI, 2 voies	1.5 - 2.4 μm		premières franges en mars 2001
KI, multi voies	1.5 - 5 μm	imagerie	à implémenter
KI	10 μm	"nulling"	à implémenter
VLTI, VINCI	K		premières franges en mars 2001
VLTI, MIDI	10 - 20 μm	2 voies	premières franges printemps 2002
VLTI, AMBER	1 - 2.5 μm	clôture de phase	premières franges fin 2002
VLTI, PRIMA	K,L,M	astrométrie (K), suiveur de frange	

spatio-temporelle des franges d'interférences au sein de leur enveloppe de cohérence. A long terme, il finit par brouiller le signal interférométrique, atténuant en moyenne son contraste et donc le rapport signal à bruit de la mesure. L'écart type du piston différentiel est calculé suivant la formule,

$$\sigma_{12} = 2.62 \left(\frac{B}{r_o} \right)^{\frac{5}{6}}, \quad (1.32)$$

l'atténuation est égale à $\exp(-\sigma_{12}^2)$. Il est possible d'annuler les effets de piston différentiel par une analyse quadratique du signal interférométrique similaire à celle développée en technique d'interférométrie des tavelures pour une seule pupille, en ne mesurant que le module du spectre de l'objet étudié, i.e sa *visibilité*. Une analyse linéaire long temps de pose du signal interférométrique n'est envisageable que si l'on dispose d'un contrôle dynamique de la position des franges d'interférence, en utilisant un système *suiveur de franges*. La variance du piston différentiel décrite ici par l'équation Eq. 1.32 est livrée pour une turbulence de type Kolmogorov, lorsque la dimension de l'échelle externe est largement plus grande un plus grande que la ligne de base interférométrique. En interférométrie longue base, cette condition peut-être violée (Pour le VLTI sur le site de paranal, l'échelle externe est de l'ordre de la vingtaine de mètres, pour une base de 200 mètres).

1.3 Problématiques observationnelles

L'apparition de nouvelles générations d'interféromètres faisant office de géants par rapport à leur prédécesseurs –tant au niveau des dimensions pupillaires et de la couverture (u, v) –ouvrent de nouveaux champs d'investigation en astrophysique. A ces problématiques astrophysiques sont associées des exigences particulières et des concepts instrumentaux permettant de répondre à ces exigences.

L'étude des *environnements stellaires* est une de ces problématiques majeures. Le Laboratoire d'Astrophysique de Grenoble consacre une large part de son activité de recherche à ce genre de problématique, avec en point de mire les environnements circumstellaires des étoiles jeunes (Étoiles T-Tauri) et la recherche de signatures d'accrétion-ejection autour de ces objets. Il s'agit ici de résoudre angulairement ces environnements enfouis et compacts. La recherche d'une bonne couverture (u, v) est ici une exigence essentielle. Comme autre problématique active, citons par exemple la détection interférométrique des *Noyaux Actifs de Galaxie*. L'imagerie de ces objets primordiaux de notre univers, est une autre application possible de l'interférométrie longue base. Pour ces objets lointains, véritables laboratoires naturels de la physique des hautes énergies, la sensibilité de l'instrument (grandes surfaces collectrices et correction adaptative) est capitale. L'interférométrie optique peut enfin servir à la *détection de planètes extrasolaires*. Ce sujet est très en vogue actuellement. A ce jour une cinquantaine de specimens ont été découverts dont la figure Fig.1.8 en dresse un inventaire. La détection de Jupiters

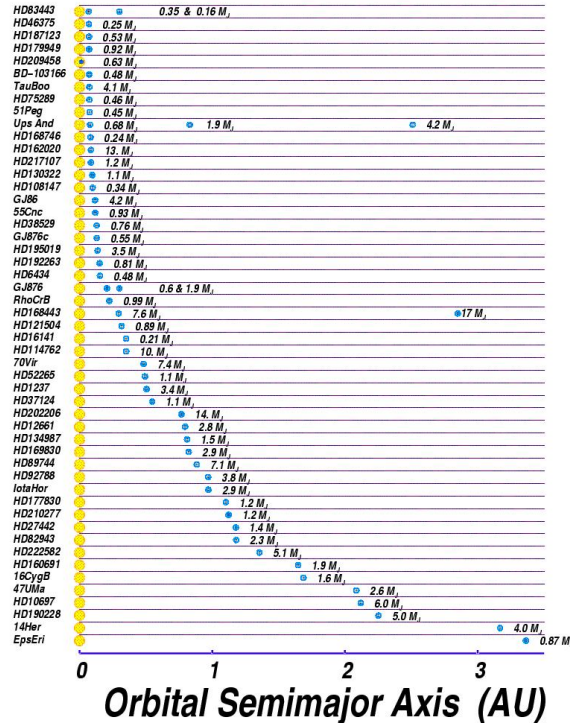
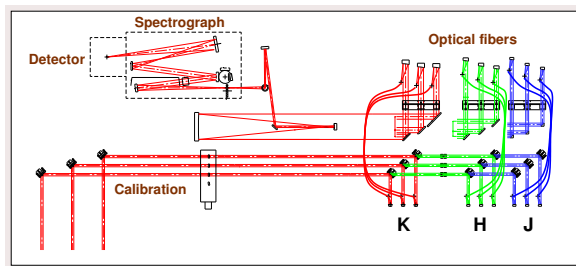


Fig. 1.8 – Inventaire des exoplanètes détectées et classées selon la distance à leur compagnon stellaire.

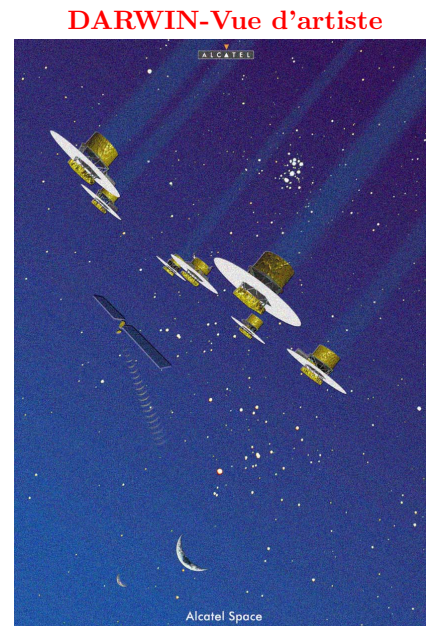
chauds est rendue possible par des méthodes de détection directe. La mesure interférométrique de la modulation en fréquences spatiales optiques du profil de visibilité d'un système binaire permet d'extraire l'information de séparation angulaire entre les compagnons. L'amplitude de la modulation permet de contraindre le rapport de flux des deux compagnons. La précision instrumentale requise sur la mesure

AMBER Concept optique**AMBER :**

- Recombinateur 3 télescopes VLTI
- Couverture spectrale : J , H et K
- Résolution spectrale : 35, 1000 et 10000
- Codage des franges multi-axial (GI2T)
- Filtrage spatial par des fibres (FLUOR)

DARWIN :

- Interféromètre à franges noires à 6 télescopes
- Couverture spectrale : $6 - 18 \mu\text{m}$ ($\sim 10 \mu\text{m}$)
- Résolution spectrale : ~ 100
- Filtrage spatial avec guides d'ondes monomodes

Fig. 1.9 – Concepts instrumentaux AMBER/DARWIN.

du profil de visibilité est ici de 10^{-4} , dans l'infra-rouge thermique, à $2.2 \mu\text{m}$. Le recombineur afocal du VLTI a été conçu pour satisfaire à cette exigence, c.f. Fig.1.3.

La détection de planètes semblables à la Terre (telluriques) ne peut cependant pas être directe, mais il est possible d'employer un subterfuge indirect, s'apparentant à de la coronagraphie, permettant d'éteindre la lumière du compagnon stellaire, pour n'enregistrer que la composante de flux en provenance de la planète. L'extinction du signal stellaire est obtenu par un procédé interférentiel. On parle donc de coronagraphie interférentielle ou de "nulling interferometry". Avec cette méthode, il est avantageux de travailler là où le contraste entre l'étoile et son compagnon est maximal. L'extinction du signal stellaire (profondeur de la frange noire ou nulling) devant être réalisée à un niveau de précision inverse, typiquement 10^{-6} à une longueur d'onde de $10 \mu\text{m}$. La mission spatiale DARWIN est un projet de coronographe interférentiel de type "free flyer", c.f. Fig.1.3. Il est tout à fait remarquable de constater les fibres optiques ou l'optique intégrée apparaissent comme des éléments technologiques majeurs de ces deux instruments, permettant d'atteindre les degrés de précision souhaités.

1.4 Les guides d'onde en interférométrie

Depuis quelques années en effet seulement, on intègre extensivement les fibres optiques (et depuis peu les guides d'onde optiques) dans les designs interférométriques, pour le transport et la recombinaison des faisceaux. Froehly [29] et Connes et al. [17] furent les premiers à proposer l'optique fibrée pour connecter interférométriquement différentes ouvertures. Des développements instrumentaux majeurs ont été réalisés dans ce domaine (Shaklan & Roddier [93], Shaklan [94], Reynaud et al. [84], Reynaud

& Lagorceix [83]) par le biais de fibres en silice dans le visible, et, dans le proche infra-rouge (Coudé du Foresto & Ridgway [19], Coudé du Foresto et al. [21]) avec des fibres en verre fluoré opérant à $2.2 \mu\text{m}$. Plus récemment, Kern et al. [48, 49] and Malbet et al. [57] ont proposé d'utiliser *l'optique intégrée planaire* pour la recombinaison des faisceaux. L'optique intégrée regroupe sur un chipset optique miniature une multitude de guides d'ondes optique monomodes permettant de réaliser tout un ensemble de fonctions optiques élémentaires (Jonctions symétriques, asymétriques, coupleurs directionnels etc...) La caractérisation de ces composants d'optique planaire dédiés à l'instrumentation astronomique a été réalisée au Laboratoire d'Astrophysique de Grenoble a été relayée par Berger et al. [5], Haguenauer et al. [40].

En plus de la flexibilité offerte par un design optique combinant à la fois optique fibrée (pour le transport) et optique intégrée (pour la recombinaison), le motif initial qui prévalut à l'introduction de guides d'onde en interférométrie astronomique fut sans doute la capacité de ces derniers à *filtrer spatialement* les faisceaux à recombinaison. L'histoire du filtrage spatial commença historiquement avec les expériences de Abbe [1] et Porter [81]. Maréchal démontra que l'on pouvait améliorer la qualité photographique des images en insérant des filtres compensateurs appropriés sur le plan pupille.

Dans le contexte de l'interférométrie stellaire au sol, un des facteurs les plus limitant de la recombinaison provient de la turbulence atmosphérique [90], qui engendre des aberrations optiques sur le front d'onde, appelé communément *seeing*. Le seeing dégrade la cohérence spatiale du signal stellaire. Prasad & Loos [77] proposa d'utiliser un filtrage spatial par trou pour éliminer certaines parties des aberrations. Shaklan, Colavita & Shao [95] proposèrent au même colloque d'utiliser des fibres optiques monomodes, filtres spatiaux idéaux, pour convertir les fluctuations de phase en scintillation. Ils montrèrent que l'estimateur de la visibilité des franges n'est pas biaisé, facilement calibrable et indépendant des conditions de seeing atmosphérique. Le rapport signal sur bruit obtenu sur l'estimateur conduisant à une valeur comparable aux valeurs obtenues sans filtre spatial. St-Jacques et al. [100] ont étudié le filtrage par un trou et ont sensiblement amélioré la qualité du signal interférométrique de l'interféromètre COAST.

De ce point de vue, (l'augmentation du rapport signal sur bruit) les avantages ou les inconvénients d'un filtrage spatial par trou filtrant ou par fibres optiques monomodes sont rarement discutés. J'ai donc réalisé une étude comparative simplifiée des performances d'un filtrage spatial par trou ou d'un couplage monomode pour l'instrument AMBER, le recombinateur afocal du VLTI. Les résultats de cette étude ont fait l'objet d'un mémoire AMBER et d'une présentation lors du congrès SPIE de Munich en 2000, Mège & Malbet [64]. *J'en ai conclu à la supériorité des guides d'onde monomodes par rapport à un trou filtrant du point de vue de l'amélioration du rapport signal à bruit, pour la plage usuelle de fonctionnement d'AMBER en termes de rapport de Strehl moyen, obtenus après correction par son système d'optique adaptative (NAOS)*. Dès lors, mon attention s'est focalisée sur la théorie du filtrage modal. Les seules références dont je disposais au début de ma thèse concernaient presque exclusivement l'instrument FLUOR, installé sur IOTA, instrument précurseur de la recombinaison fibrée. FLUOR démontra *sur le ciel* toute l'aptitude des fibres optiques à permettre le contrôle des perturbations introduites par la turbulence atmosphérique, Coudé du Foresto [20]. PTI (*Palomar Testbed Interferometer*) le banc d'essai du Keck Interferometer utilisait aussi un filtrage modal, (Colavita et al. [16]). Les grands instruments disposent de guides d'onde monomodes, comme AMBER sur le VLTI (Petrov et al. [80]) ou bien les recombineurs de Keck dans le proche infrarouge, (Colavita et al. [15]).

J'ai pu me rendre compte que les guides d'onde optique sont des composants dont l'action est souvent mal comprise, non seulement par moi, mais aussi par la communauté astronomique et en

particulier par celle des interférométristes optiques ! Depuis les travaux de FLUOR les guides sont souvent appréhendés comme de simples entonnoirs à photons ou le nombre de photons injectés est calculable à partir du taux de couplage, (Ruillier [voir par exemple 85]). Les effets du filtrage modal sur le degré de cohérence spatial de la source ne sont jamais décrits, pas plus que la propagation au sein du guide. Je souhaite, en toute modestie, que cette thèse, puisse apporter quelques éléments de réponse, à la communauté astronomique sur ce point. En parallèle, et de façon indépendante, d'autres auteurs (Guyon [39], Dyer & Christensen [27]) se sont intéressés à la relation objet-image livrée par un interféromètre fibré. Nous aboutissons, et c'est une chose heureuse, à des conclusions semblables, même si le formalisme développé ici se rapproche plus de celui développé dans le travail du second auteur⁴.

1.5 Plan de thèse

Cette thèse est divisée en deux parties. La première partie est consacrée à la modélisation numérique de la propagation au sein d'une fibre optique. Elle permet de comprendre les mécanismes physiques générateurs du filtrage modal. Le filtrage monomode apparaît comme le résidu d'une évacuation progressive de l'énergie lumineuse non guidée dans le coeur de la fibre. Cette vision complète de la propagation, si elle est connue des opticiens de l'optique guidée ne l'est pas nécessairement des astronomes interférométristes, étant rarement développée dans la littérature. Le modèle numérique que j'ai développé permet d'aboutir à la notion de taux de réjection de l'énergie rayonnée dans la gaine, ainsi qu'à la notion de longueur de réjection, d'une fibre optique. Le dimensionnement critique au delà duquel une partie significative de l'énergie lumineuse est couplée sur le mode fondamental d'une fibre est un problème de première importance pour certaines techniques observationnelles comme celle de *coronographie interférentielle*.

La deuxième partie est consacrée à la formalisation de la relation objet-image en conditions monochromatiques, dans le cas d'un filtrage considéré comme étant purement monomode. Je laisse dans cette étude volontairement de côté, les sources de dégradation du contraste connexes et calibrables (contrôle de la dispersion, de la polarisation...) dont on connaît les causes et les remèdes depuis les travaux de plusieurs auteurs, Perrin [79], Haguenauer et al. [41]. Dans cette partie, j'établis formellement la connexion entre la visibilité mesurée par un interféromètre fibré et le degré de cohérence spatial de la source. Ce lien est codé dans le couplage électromagnétique du signal stellaire avec le mode fondamental du guide, notion que j'exporte au niveau du flux corrélé dans une recombinaison interférométrique fibrée.

Je montre que l'on ne mesure pas la visibilité de l'objet, mais *une visibilité modale*, qui est en toute généralité dépendante de la source et des conditions de seeing. D'autre part, le "biais" induit ne se résume pas à une simple multiplication par une fonction de transfert calibrable, comme en interférométrie plan-pupille ou point par point sur le plan de Fourier en interférométrie plan-image. La relation objet-image n'est plus identique au type de relation objet-image obtenue pour un système invariant par translation. En revanche, elle s'apparente à celle des radio-interférométristes. La recombinaison interférométrique fibrée permet de mesurer une corrélation de photons intégrés dans un certain lobe d'antenne interférométrique, sensibles aux conditions atmosphériques. La limitation du champ de vue induite par la multiplication avec le lobe d'antenne est à l'origine d'un biais intrinsèque,

⁴La dérivation de la relation objet image dans la première publication est cependant inexacte. La démarche que j'ai entreprise est voisine de celle du second auteur elle est axée sur une propagation de la fonction de cohérence partielle dans l'interféromètre.

dont il faudra s'affranchir en minimisant les effets de champ, soit en augmentant la taille du lobe (couplage de sous-pupilles de tailles plus réduites), soit en divisant l'image par le lobe instrumental moyen (au sens des réalisations atmosphériques et des points de visibilité acquis sur le plan (u, v) , soit enfin en restaurant une véritable relation-objet image multiplicative sur le plan de Fourier. Ces deux dernières méthodes, étant à vocation plus générale est surtout applicable à n'importe quelle source, indépendamment de toute considération de taille relative entre le lobe d'antenne interférométrique et la source observée. Nous profitons ici du formalisme développé dans cette partie pour livrer l'expression d'une base de correction adaptative modale optimisée du point de vue de la stabilisation du taux couplage sur le mode fondamental d'un guide d'onde.

Chapitre 2

Un Modèle de fibre optique

Sommaire

2.1 Filtrage optique monomode	30
2.1.1 Un seul mode ne suffit pas	30
2.1.2 Hypothèses de base	33
2.2 Théorie modale	36
2.3 Le spectre ponctuel	38
2.3.1 Cartes transverses	38
2.3.2 Quantification spectrale	38
2.3.3 Règles de sélection	41
2.3.4 Influence du paramètre de guidage	43
2.3.5 Interprétation physique	46
2.4 Le Continuum spectral	48
2.4.1 Cartes transverses	49
2.4.2 Interprétation physique	52
2.5 Orthonormalisation	52
2.6 Analyse et synthèse modale	60
2.7 Conclusion	63

2.1 Filtrage optique monomode

2.1.1 Un seul mode ne suffit pas

L'utilisation de l'optique guidée comme technologie pour la recombinaison interférométrique a été proposée par Froehly [29] et Connes et al. [17]. Dans leur travail, les principes essentiels du filtrage spatial monomode, ou plus simplement *filtrage modal*, sont énoncés qualitativement. Un guide d'onde monomode se comporte comme un filtre spatial idéal pour toutes les longueurs d'onde supérieures à sa longueur d'onde de coupure monomode. Pour chacune de ces longueurs d'onde, il va guider le signal stellaire sur un mode de propagation unique à savoir *son mode fondamental* dont le profil exact, dépendant des caractéristiques opto-géométriques du guide, est souvent approché par une distribution gaussienne. Ce dernier se propage comme une onde parfaitement plane, dans la direction principale du guide. L'amplitude complexe de cette onde est déterminée par une projection scalaire du signal injecté sur le plan d'entrée du guide, sur le mode fondamental. Par ce mécanisme le filtrage modal transforme ainsi les défauts de phase du front d'onde prélevé par la pupille d'entrée en fluctuations d'intensité sur le signal filtré, variations photométriques que l'on peut monitorer en temps réel. Les interférogrammes obtenus par recombinaison des faisceaux monomodes peuvent alors être corrigés de ces fluctuations (par une calibration photométrique adéquate) menant à une estimation de la visibilité des franges d'interférence quasiment indépendante de la turbulence atmosphérique¹. L'instrument FLUOR (Coudé du Foresto & Ridgway [19]) fut sans doute le premier instrument à exploiter de façon routinière la recombinaison monomode à l'aide de fibres en verre fluoré, dans le proche infrarouge [$2\mu\text{m}$], c.f. Fig.2.1, et à obtenir par cette calibration photométrique des précisions relatives de 0.5%, jusqu'alors inégalées par des méthodes de recombinaison multimode usuelles.

Résumer le couplage électromagnétique du signal stellaire au couplage sur le mode fondamental du guide d'onde est sans doute une description suffisante de la propagation dans le guide, pour la plupart des applications interférométriques monomodes dédiées à l'observation astronomique. Cette description est souvent présentée comme une prescription *ad-hoc* dans la littérature, Shaklan & Roddier [93], sans autre justification. La quantification énergétique du couplage fondamental a largement été étudiée dans la littérature. L'amplitude au carré de l'amplitude complexe couplée est assimilée mesure le flux guidé sur le mode fondamental du guide. Normalisée aux flux entrant elle devient assimilable à une transmission optique. Plusieurs auteurs ont montré que pour une source ponctuelle cette transmission est une grandeur optimisable de l'ouverture numérique (rapport F/D) du système optique d'injection, c.f. Fig.2.2.

Dans le cas d'une source non résolue par une pupille individuelle, cette transmission optimale est de 80%. Ruillier [85] a étudié numériquement les fluctuations statistiques (moments du premier et second ordre) de ce taux de couplage dans une turbulence de Kolmogorov et quantifié l'influence d'une correction partielle d'un nombre fini de polynômes de Zernike², c.f. fig.2.3.

Néanmoins, il faut avoir conscience que cette description purement monomode du signal est une description réductrice. En effet, le signal de sortie d'un guide n'est jamais "instantanément" transmis sur un mode de propagation unique et il faut pouvoir invoquer un mécanisme physique permettant

¹Nous nuancerons fortement cette affirmation au chapitre dédié à la nature de la relation objet-image en interférométrie monomode, car elle n'est pas vraie dans le cas d'une source étendue.

²Cette étude intéressante décrit le comportement du couplage monomode en conditions turbulentes (D/r_o), on peut toutefois regretter qu'elle n'utilise pas une base de correction optimisée pour la correction adaptative tenant compte de la géométrie du mode fondamental, d'autre part le lien avec les performances du système en termes de rapport signal à bruit n'est pas clairement exprimé

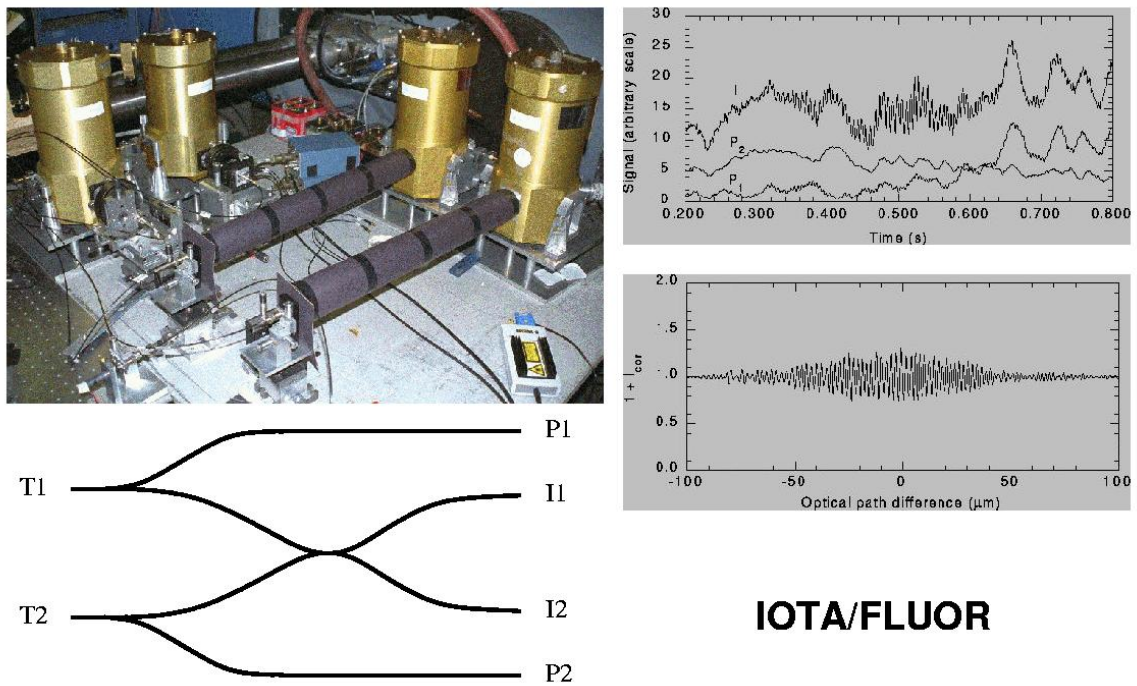


Fig. 2.1 – Table de recombinaison de l'instrument FLUOR avec fibres en verres fluoré (bande K- $2.2 \mu\text{m}$). Planche de gauche : Table de recombinaison et schéma de principe en optique fibrée. Figure de droite : Enregistrements temporels et simultanés des voies interférométriques (T1 ou T2) et des voies de calibration photométrique (P1 et P2). Interférogramme “redressé” de ses fluctuations photométriques. Le signal est parfaitement stabilisé.

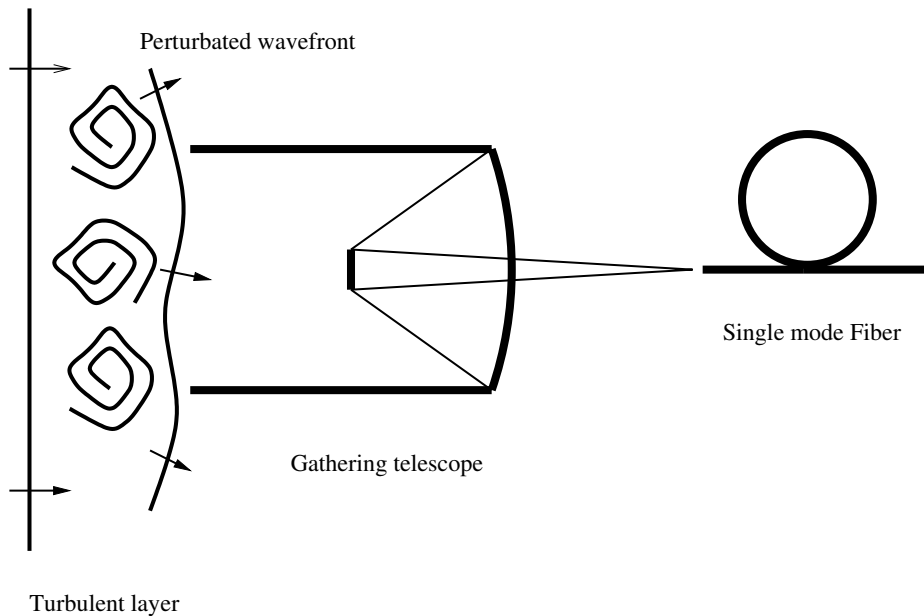


Fig. 2.2 – Représentation schématique de l'injection sur une tête de fibre.

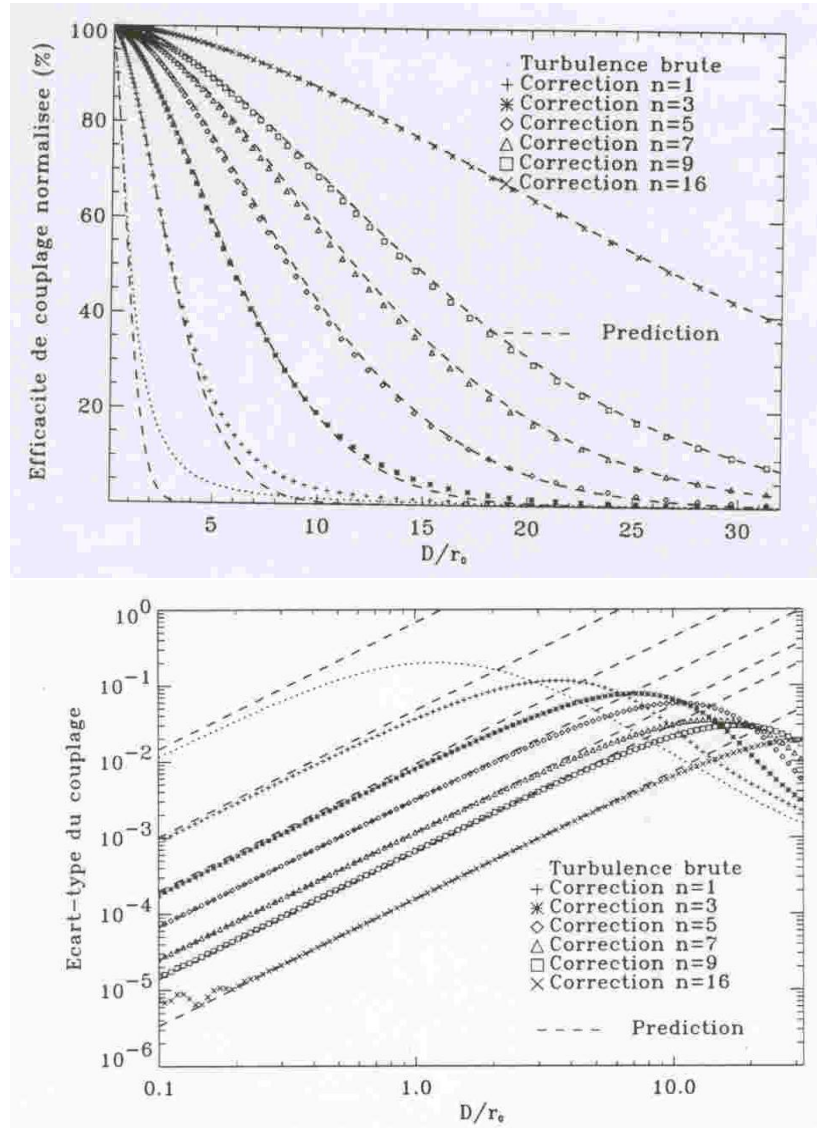


Fig. 2.3 – Moments statistiques du premier et second ordre sur le taux de couplage nonomode en fonction de la force de la turbulence atmosphérique et du degré de correction adaptative, d'après Ruillier [85].

de décrire une évacuation *progressive* de l'énergie non couplée sur le mode fondamental. Il faut donc inventer le devenir propagatif des 20% de l'énergie non guidée dans le coeur du guide. Ce faisant, on peut obtenir de précieux renseignements concernant la physique la *dynamique du filtrage modal* dans la longueur du guide c.f. Chap.3.

Une manière d'aborder ce problème est de voir le couplage fondamental comme un développement *au premier ordre* sur l'ensemble des modes électromagnétiques potentiellement propagés dans la structure guidante. Cet ensemble comprend aussi la famille modale des *modes rayonnés* par cette même structure. C'est sur cette famille que doit être porté l'effort de modélisation, car c'est elle qui pour longueur de propagation donnée va décrire le signal d'erreur relatif au signal fondamental.

Je me suis penché sur le développement d'un modèle complet décrivant la propagation du champ électromagnétique au sein d'une fibre optique. Dans ce chapitre je développe les grandes lignes

théoriques du modèle, ma contribution personnelle à celui-ci par rapport à ce que j'ai pu lire dans littérature et précise quelles en sont les limitations. Les questions relatives à la caractérisation de la dynamique du filtrage modal dans la longueur du guide sont adressées dans le prochain chapitre sur des exemples concrets d'injection simulés à partir du modèle.

2.1.2 Hypothèses de base

Un guide d'onde est une structure diélectrique servant à confiner le champ électromagnétique dans un domaine particulier de l'espace et à le guider suivant une certaine direction qui définit l'axe optique du guide. Le confinement spatial de la lumière est réalisé par le biais d'un mécanisme de *réflexion totale*. Pour invoquer un tel phénomène, il est nécessaire d'offrir au champ électromagnétique un milieu de propagation *présentant un certain gradient d'indice de réfraction* dans un plan transverse à l'axe optique du guide. Lorsque que le gradient imposé est continu, on parle de guide à gradient d'indice, lorsqu'il est discontinu, on préfère parler de guide à saut d'indice, c.f. Fig. 2.4.

Les propriétés diélectriques du guide, en particulier la stratification transverse en indice optique, seront supposées invariantes par translation dans la direction principale du guide. A ce titre, les guides d'ondes étudiés dans ce chapitre appartiendront à la classe des systèmes optiques à *symétrie cylindrique*. J'ai choisi d'exposer en parallèle, comme il souvent d'usage dans les ouvrages théoriques portant sur l'optique guidée, deux géométries particulières de guide : le cas du *guide d'onde planaire* et celui du guide d'onde circulaire³, c'est à dire de la *fibres optique*. Ce choix s'impose dans la mesure où le guide d'onde planaire est le guide d'onde pour lequel les solutions obtenues dans le cadre de l'optique ondulatoire prennent une forme simple et directement interprétable en termes d'optique géométrique⁴. En somme, d'un point de vue conceptuel, le guide d'onde planaire représente le référent incontournable pour discuter de la physique du guidage optique ainsi que pour échaffauder la théorie de la propagation au sein d'une structure optique plus complexe comme celle la fibre optique.

Je limite également la discussion au cas des guides d'onde *bi-couche* à saut d'indice, parce-qu'ils sont les plus couramment utilisés en interférométrie stellaire. Ces guides sont constitués d'une couche diélectrique interne, *le coeur*, revêtue d'une couche diélectrique externe, *la gaine*, d'indice optique légèrement inférieur. Le terme bi-couche est inexact, puisqu'en toute rigueur, pour calculer la distribution spatiale du champ électromagnétique de manière exacte au sein du guide, on doit également tenir compte des conditions aux limites externes du problème de propagation, c'est à dire du milieu diélectrique dans lequel le guide est immergé... typiquement l'air en ce qui concerne les designs optiques les moins saugrenus!. Toutefois pour les guides d'ondes usuels, en particulier pour les guides d'ondes monomodes, il existe une grande disproportion entre les dimensions transverses associées à la gaine et celles associées au coeur, typiquement un facteur 25 ou plus. En pratique, on idéalise cette situation en rejetant "au loin" les conditions aux limites du problème de propagation et en traitant le guide comme une structure diélectrique effectivement bi-couche, dont la gaine est d'extension semi-infinie dans son plan transverse⁵. Le traitement formel rigoureux du guidage optique par fibre circulaire à saut d'indice a été impulsé par Dietrich Marcuse dans les années 1970 dont l'essentiel peut-être trouvé dans Marcuse [60]. Dans ce traité magistral l'auteur résout les équations de Maxwell au sein du guide

³A ne pas confondre avec le terme "symétrie cylindrique".

⁴Les solutions dérivées de la théorie des rayons sont identiques à celles obtenues par une description électromagnétique de la propagation au sein du guide

⁵Implicitement, on considère que les conditions aux limites sont sans influence ni sur la structure spatiale des modes de champ électromagnétiques propagés dans le guide, ni comment ils se répartissent spectralement au sein de l'analyse modale.

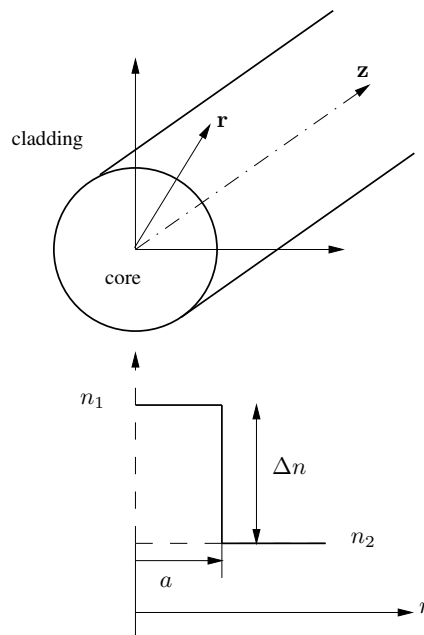


Fig. 2.4 – Géométrie associée à la fibre circulaire, illustrant la stratification en indice optique transverse à l’axe principal du guide. La stratification est invariante par rotation dans le plan transverse.

d’onde. Il montre que le champ électromagnétique total peut être analysé linéairement et orthogonalement sur un ensemble (discret ou continu) de solutions élémentaires appelées *solutions modales* ou plus simplement *modes*. La contribution individuelle des modes électromagnétiques au rayonnement global reflète des réalités physiques différentes : en effet, certains d’entre eux décrivent la partie du champ électromagnétique qui reste confiné dans le coeur du guide par un mécanisme de réflexion totale, ce sont les modes effectivement guidés par la structure diélectrique et dont le nombre peut être réduit à l’unité—à savoir le mode fondamental du guide—par un dimensionnement opto-géométrique du guide approprié. Dans une telle situation, on parle de guidage monomode.

Mais en réalité d’autres modes, plus chanceux, ont la possibilité de s’échapper du coeur vers les régions externes, et sont appelés *modes rayonnés*. Autrement dit, l’énergie lumineuse non couplée sur le mode fondamental d’une fibre optique est rayonnée dans la gaine. Un guide d’onde n’est jamais, au sens strict, du terme “monomode”.

Marcuse montre aussi que l’analyse du champ électromagnétique en termes de polarisation est compliquée. Elle est étroitement dépendante de la façon dont la géométrie du système couple les composantes parallèles du champ électromagnétique entre-elles via *les conditions de continuité* imposées à la traversée des surfaces de discontinuité diélectrique du guide. Si pour le guide d’onde planaire, la géométrie permet une simplification et un découplage de l’analyse en termes de modes Transverse Electrique (TE) ou Transverse Magnétique (TM) uniquement, pour la fibre optique il n’en est rien, et les modes qu’elle propage possèdent en général une structure sophistiquée à six composantes de champ notées respectivement (EH, HE) suivant la prédominance du champ électrique ou magnétique⁶.

Une description exacte en polarisation des modes propagés par la fibre optique induit certaines difficultés d’ordre mathématique, notamment du point de vue de la *normalisation des modes rayonnés*. Si l’orthogonalité de deux modes distincts peut-être établie à partir de considérations générales por-

⁶Modes TE et TM sont également des solutions possibles

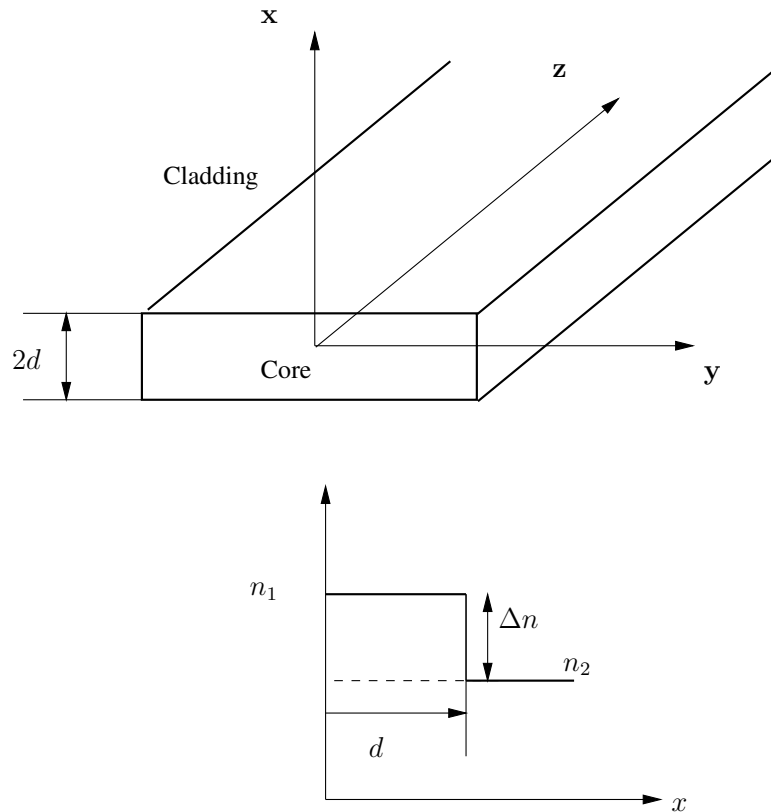


Fig. 2.5 – Géométrie associée au guide planaire illustrant la stratification en indice optique transverse à l'axe principal du guide. Cette stratification est invariante par translation dans une direction particulière du plan transverse.

tant sur les systèmes optiques à *symétrie cylindrique* via le théorème de réciprocité de Lorentz, la prescription d'une puissance optique unitaire, transportée suivant l'axe de la fibre ne suffit pas à contraindre la norme d'un mode rayonné lui-même⁷. Les modes rayonnés obtenus analytiquement et qui découlent naturellement de la résolution des équations de Maxwell ne sont pas directement normalisables. Pour lever cet dégénérescence, l'auteur propose d'orthogonaliser deux modes linéairement indépendants arbitrairement générés sur la base des modes rayonnés initiaux dont on connaît la forme analytique. Dixit Marcuse, les équations résultantes sont compliquées, elles ne sont malheureusement pas reproduites dans Marcuse [60]. Mais le problème mathématique est clairement identifié, et peut être résolu numériquement, par un procédé d'orthogonalisation de la famille initiale, de type Graham Schmidt.

Un traitement simplifié du problème, que j'ai appliqué, consiste à faire le prix d'un modèle rigoureux de guide d'onde en termes de polarisation et d'utiliser une description approchée développée par Glodge [36] et dont les lignes essentielles sont reproduites dans Marcuse [61]. En effet, en supposant que le gradient d'indice Δn imposé à l'interface du coeur de guide et de la gaine n'excède pas quelques pourcents en valeur relative, ce qui est le cas pour les fibres optiques utilisées en astronomie, on peut obtenir une solution formelle normalisable de tous les modes de la structure—modes rayonnés

⁷contrairement aux modes guidés dont l'amplitude du est déterminée de façon bi-univoque par la puissance lumineuse qu'ils transportent

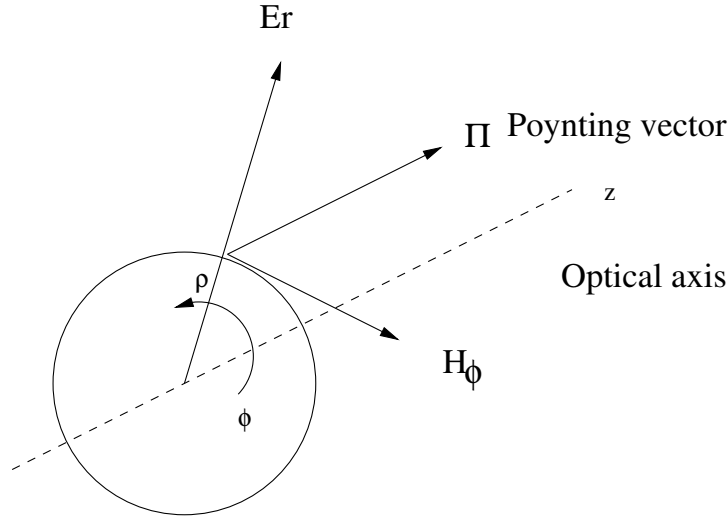


Fig. 2.6 – Dans l’approximation de guidage faible, la structure électromagnétique d’une mode est quasi-transverse. (composantes axiales négligeables). D’autre part dans cette même approximation, la biréfringence est négligeable, et l’analyse modale du guide est menée de façon isotrope sur n’importe quelle polarisation linéaire transverse du champ.

y compris. Cette hypothèse renvoie à *l’approximation de guidage faible*, bien connue des théoriciens de l’optique guidée. Sous cette hypothèse, on peut considérer que l’onde lumineuse injectée dans un guide d’onde “voit” un milieu de propagation quasi-homogène. Ainsi, conserve-t-elle une nature quasi-transverse du point de vue de la polarisation, et les différents modes de polarisation complexes du guide obtenus lors d’une résolution exacte des équations de Maxwell (modes *TE* et *TM* pour le guide planaire, modes *EH*, *HE* pour la fibre optique) “dégénèrent” pour former des ensembles polarisés linéairement et orthogonaux entre eux, ayant même vitesse de propagation suivant l’axe du guide. Autrement dit, dans l’approximation de guidage faible, *un guide d’onde ne présente pas de biréfringence*, et l’on peut se satisfaire d’une résolution scalaire et non vectorielle de l’équation d’onde inhomogène dans le guide. Cette hypothèse simplificatrice sert souvent comme point de départ direct aux développements théoriques menés dans les ouvrages d’introduction au formalisme du guidage par fibre optique (Jeunhomme [46], Gatak [35]).

2.2 Théorie modale

On suppose une dépendance temporelle harmonique du champ électromagnétique de pulsation ω . L’amplitude complexe monochromatique pure du champ doit satisfaire à l’équation d’onde scalaire de Helmholtz dans le cœur et dans la gaine du guide,

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \quad (2.1)$$

où k désigne la distribution transverse nombre d’onde $k = \frac{n\omega}{c}$, n la distribution transverse d’indice optique et c la célérité de la lumière dans le vide. La symétrie cylindrique nous autorise à séparer les variables d’espace, c’est à dire à rechercher la solution sous la forme d’une carte de champ dépendant uniquement des coordonnées transverses, modulée harmoniquement suivant l’axe du guide,

$$E = e \exp(i\beta z). \quad (2.2)$$

Dans ce cas l'équation d'onde s'exprime sous la forme d'une équation de Helmholtz du type,

$$\nabla_{\perp}^2 e + \kappa^2 e = 0 \quad \text{avec} \quad \kappa^2 = k^2 - \beta^2 \quad (2.3)$$

où β n'est autre que la projection axiale d'un vecteur d'onde \mathbf{k} associé à la solution modale considérée. $\kappa = k_{\perp}$ est la projection orthogonale de ce vecteur d'onde sur le plan transverse.

L'équation différentielle transverse doit être résolue dans le coeur et dans la gaine. Les solutions scalaires indépendamment obtenues dans ces deux régions sont connectées par continuité à l'interface. Une continuité de classe C^1 est imposée sur la carte de champ transverse. La continuité de la dérivée première est effectivement consistante, dans l'approximation de guidage faible, à la conservation de la composante tangentielle du champ électromagnétique à la traversée d'une surface de discontinuité diélectrique.

Par définition *un mode* est donc solution mathématique particulière de l'équation de Helmholtz, caractérisée par une carte de champ transverse et une constante de propagation sur l'axe et vérifiant les conditions de continuité exposées ci-dessus. A ces conditions de continuité, il convient d'ajouter que le mode doit être borné et de carré sommable (éventuellement au sens des distributions—c.f. les modes rayonnés).

Le domaine d'appartenance de la constante de propagation dans le plan complexe permet de classer “spectralement” les solutions modales obtenues. Mathématiquement cette classification spectrale est intimement liée à la représentation spectrale de l'opérateur linéaire $-\nabla_{\perp}^2$ puisque l'équation de Helmholtz n'est autre que l'équation aux valeurs propres de cet opérateur, κ^2 apparaissant dans cette équation comme la valeur propre associée. Physiquement, elle exprime qu'il est possible d'exciter au sein d'un guide d'onde des modes de propagation reflétant des réalités physiques différentes, c.f. Fig.2.7.

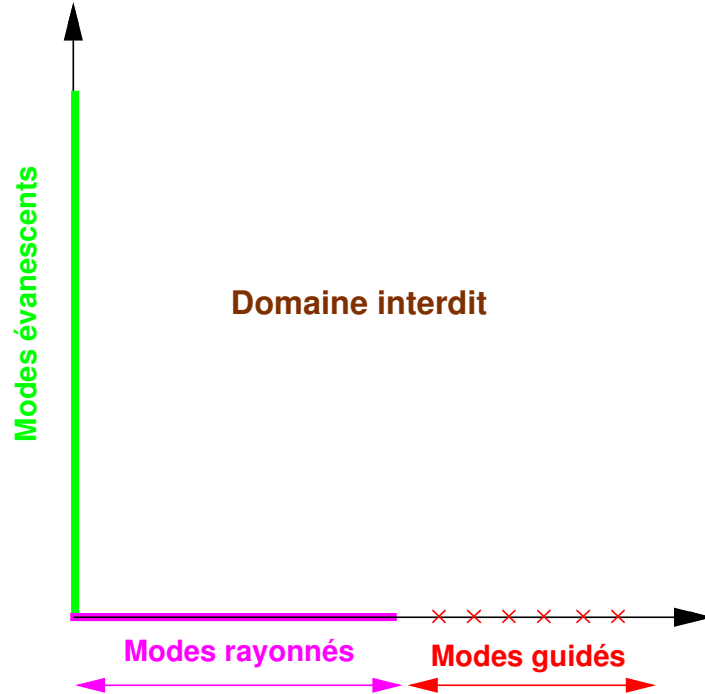


Fig. 2.7 – Classification spectrale des solutions sur le plan complexe en constante de propagation β .

2.3 Le spectre ponctuel

Dans un milieu bicouche à saut d'indice, les modes dont les constantes de propagation axiale sont à *valeurs réelles* et comprises dans l'intervalle,

$$k_2 < |\beta| < k_1 \quad (2.4)$$

correspondent à des *modes guidés*. La limite supérieure de l'encadrement exprime le fait qu'un mode guidé ne peut pas se propager moins vite que la vitesse de phase minimum admissible au sein du guide ($\frac{c}{n_1}$). La limite inférieure de l'encadrement indique qu'un mode guidé ne peut pas se propager dans la gaine plus vite que la vitesse de la lumière gaine sans irradier de la puissance (c.f. coupure d'un mode guidé-et modes évanescent). Pour ce domaine spectral, dans le coeur on aura $\kappa^2 > 0$ dans le coeur, mais $\kappa^2 < 0$ dans la gaine. Ainsi d'après l'équation de Helmholtz, la structure transverse du mode sera *oscillante dans le coeur et évanescente dans la gaine*, ce qui correspond par essence à une structure de champ guidé. Pour traduire cette différence de comportement, il convient de poser,

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \quad \text{dans le coeur} \\ \kappa &= i\gamma \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad \text{dans la gaine.} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.3.1 Cartes transverses

Les solutions de modes guidés du guide d'onde planaire sont obtenus sous des formes symétriques ou anti-symétriques suivantes,

$$\begin{aligned} e &= B \begin{cases} \cos(\kappa x) \\ \sin(\kappa x) \end{cases} \quad |x| < d \\ e &= B \exp -\gamma(|x| - d) \begin{cases} \cos(\kappa d) \\ \sin(\kappa d) \end{cases} \quad |x| > d. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les solutions de modes guidés de la fibre circulaire sont obtenus sous des formes symétriques ou anti-symétriques en azimut sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} e &= B \frac{J_l(\frac{\kappa r}{a})}{J_l(\kappa)} \begin{cases} \cos(l\phi) \\ \sin(l\phi) \end{cases} \quad |x| < a \\ e &= B \frac{K_l(\frac{\gamma r}{a})}{K_l(\gamma)} \begin{cases} \cos(l\phi) \\ \sin(l\phi) \end{cases} \quad |x| > a \end{aligned} \quad (2.7)$$

où J_l fonction de Bessel de première espèce décrit la carte du champ dans le coeur de fibre et K_l fonction de Bessel modifiée de seconde espèce décrit la carte du champ dans la gaine. l parcourt l'ensemble des entiers naturels définissant le degré azimutal du mode concerné. La carte d'un mode guidé se comporte asymptotiquement comme $\exp(-\gamma r)$ ce qui montre bien le confinement spatial des modes guidés dans le coeur lorsque $\gamma > 0$.

2.3.2 Quantification spectrale

Les solutions développées plus haut sont continues à l'interface. En imposant de plus la continuité de la dérivée première, on dérive une équation supplémentaire dite *équations aux valeurs propres* ou

e.v.p. Dans le cas du guide d'onde planaire, pour les deux familles symétriques et anti-symétriques des modes, l'e.v.p s'écrit :

$$\tan \kappa d = \begin{cases} \frac{\gamma}{\kappa} & \text{modes symétriques} \\ -\frac{\kappa}{\gamma} & \text{modes antisymétriques.} \end{cases} \quad (2.8)$$

De manière analogue, dans le cas de la fibre optique,

$$\frac{K_l(\gamma a)}{K_{l+1}(\gamma a)} \frac{J_{l+1}(\kappa a)}{J_l(\kappa a)} = \frac{\gamma}{\kappa}. \quad (2.9)$$

Ces e.v.p. sont fondamentales puisqu'elles discrétisent la distribution spectrale des modes guidés en constante de propagation axiale β (ou en fréquence spatiale κ). Pour s'en rendre compte, nous définissons la *paramètre de guidage* par la grandeur⁸,

$$V = \sqrt{(k_1^2 - k_2^2)} \begin{cases} d & \text{pour le guide planaire} \\ a & \text{pour la fibre,} \end{cases} \quad (2.10)$$

et nous raisonnons sur les valeurs admissibles solutions des e.v.p du paramètre $\epsilon = \kappa d$ pour le guide planaire, ou $\epsilon \kappa a$ pour la fibre. Notons immédiatement que fréquences d'oscillation spatiales κ et coefficient d'évanescence γ dans la gaine sont contraints par une relation quadratique du type,

$$V^2 \begin{cases} = (\kappa d)^2 + (\gamma d)^2 & \text{pour le guide planaire} \\ = (\kappa a)^2 + (\gamma a)^2 & \text{pour la fibre.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Les modes étant guidés ($\kappa > 0$, $\gamma > 0$), cette relation définit l'évanescence du mode dans la gaine de façon bi-univoque par rapport à la fréquence d'oscillation dans le coeur et les solutions admissibles pour la valeur de ϵ sont nécessairement à rechercher dans l'intervalle $[0, V[$. Sur cet intervalle, les solutions discrètes des e.v.p peuvent être visualisées graphiquement comme la recherche des points d'intersection d'un quadrant de rayon V avec une certaine fonction $f(V, \epsilon)$, c.f. Fig. 2.8 et Fig. 2.9

$$\begin{aligned} \epsilon \tan \epsilon &= \sqrt{V^2 - \epsilon^2} & \text{modes symétriques} \\ -\epsilon \tan \epsilon^{-1} &= \sqrt{V^2 - \epsilon^2} & \text{modes antisymétriques,} \end{aligned} \quad (2.12)$$

pour le guide planaire et,

$$\epsilon \frac{K_l(\sqrt{V^2 - \epsilon^2})}{K_{l+1}(\sqrt{V^2 - \epsilon^2})} \frac{J_{l+1}(\epsilon)}{J_l(\epsilon)} = \sqrt{V^2 - \epsilon^2}, \quad (2.13)$$

dans le cas de la fibre. Nous déduisons de ces représentations graphiques que pour une configuration opto-géométrique de guide donnée spécifiée par la valeur du paramètre de guidage les e.v.p renvoient un nombre fini de valeurs admissibles pour κ , γ et donc du module de la constante de propagation axiale $|\beta|$. Les solutions modales ainsi discrétisées sont traditionnellement ordonnées par valeur de fréquence d'oscillation spatiale κ croissante. Les modes du guide planaire peuvent être indexés comme suit,

$$E_j = e_j \exp(i\beta_j) \quad j \in [0, \max(j)] \begin{cases} j & \text{pair modes symétriques} \\ j & \text{impair modes antisymétriques.} \end{cases} \quad (2.14)$$

⁸Attention le paramètre de guidage du guide d'onde plan défini ici vaut la *moitié* du paramètre de guidage usuellement défini dans la littérature.

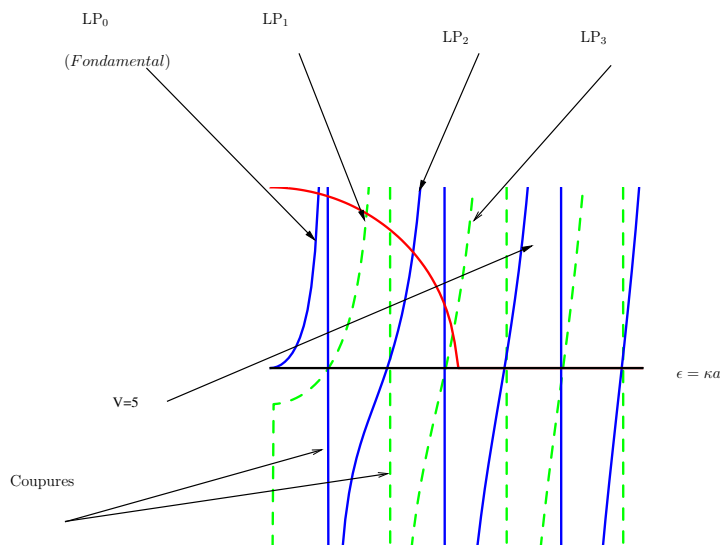


Fig. 2.8 – Résolution graphique de l'équation aux valeurs propres pour le guide d'onde planaire, pour un paramètre de guidage $V = 5$ (quadrant rouge). L'intersection des courbes obtenues pour chaque degré azimutal avec le quadrant rouge renvoie la valeur discrétisée de la fréquence spatiale correspondante sur l'axe des abscisses. Les asymptotes verticales illustrent la notion de coupure des modes obtenus.

où $\max(j)$ est la valeur maximale admises pour l'index. Les modes guidés de la fibre seront nécessairement doublement indexés puisque l'équation aux valeurs propres est relative à un degré azimutal donné. Au sein d'une famille de modes de même degré azimutal, ces derniers peuvent être ordonnés par degré radial m croissant, correspondant à une fréquence d'oscillation transverse ϵ également croissante.

$$E_{lm} = e_{lm} \exp(i\beta_{lm}) \quad l \in [0, \max(l)] \quad m \in [1, \max(m)], \quad (2.15)$$

où $\max(m), \max(l)$ sont les valeurs maximales admissibles par les degrés radiaux et azimutaux. Nous voyons que la seule donnée du paramètre de guidage du guide V détermine bi-univoquement quels sont les modes susceptibles d'être guidés ou non par la structure optique, et pour chaque mode, sa fréquence d'oscillation spatiale κ , son évanescence de gaine γ , et sa constante de propagation axiale β . Aussi réciproquement, les e.v.p doivent-elles permettre de tabuler "universellement" toutes ces valeurs d'un mode guidé à un autre décider de la sélection de tel ou tel mode guidé en fonction du paramètre de guidage du guide V .

J'ai mis en oeuvre un algorithme numérique me permettant de trouver les valeurs propres de la fibre optique pour un paramètre de guidage donné associées à tous les modes potentiellement guidés. Cet algorithme localise les valeurs propres par bisection, (Press et al. [76]). Cet algorithme me permet de faire l'analyse modale de tous les modes guidés d'une fibre optique quelconque, et pour n'importe quelle longueur d'onde. Il me permet de dresser la carte d'identité complète du guide d'une fibre quelconque en termes de mode guidé. Même si dans le contexte astronomique on ne s'intéresse qu'au mode fondamental du guide, la possibilité de traiter le cas multimodal, n'est pas gratuite. Le modèle permettra à court terme de simuler les sauts de transition d'un régime multimodal à monomodal observées expérimentalement lors des études spectrométriques de transmission du guide d'onde c.f. Fig.2.10.

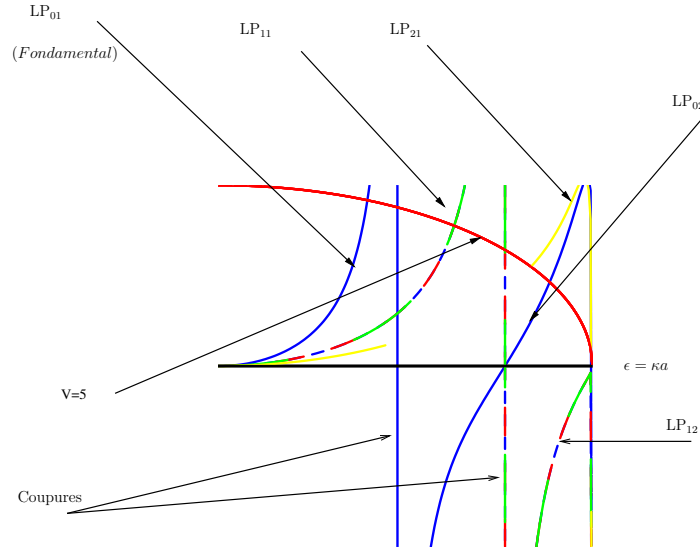


Fig. 2.9 – Résolution graphique de l'équation aux valeurs propres pour la fibre circulaire, pour un paramètre de guidage $V = 5$. L'intersection des courbes obtenues pour chaque degré azimutal avec le quadrant renvoie la valeur discrétisée de la fréquence spatiale correspondante sur l'axe des abscisses. Les asymptotes verticales illustrent la notion de coupure des modes obtenus.

Tab. 2.1 – Fréquences de coupure pour les modes guidés du guide d'onde planaire.

j	0	1	2	3	4
V_c	0	1.5708	3.14159	4.71239	6.28319

2.3.3 Règles de sélection

La première loi réciproque à examiner est celle régissant la sélection des modes guidés. Un mode ne peut plus être guidé lorsque $\gamma \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow V = V_c$, $|\beta| \rightarrow k_2$. En effet, la solution modale associée n'est plus du tout confinée au voisinage du coeur ce qui signifie que lorsque cette limite est atteinte par un mode donné, celui-ci se détache spatialement du coeur de guide et ne peut plus être considéré comme appartenant à la classe des modes guidés. On dit que le mode est “coupé”. Toutes les fréquences de coupure peuvent se déduire d'une analyse des formes limites prises par les e.v.p. dans le cas où $\epsilon \rightarrow V = V_c$. Pour le guide d'onde planaire, les fréquences de coupure s'obtiennent comme les racines de,

$$\begin{aligned} V_c \tan V_c \quad \text{modes symétriques soit} \quad V_c = j \frac{\pi}{2} \quad j \text{ pair} \\ V_c \tan^{-1} V_c \quad \text{modes antisymétriques soit} \quad V_c = j \frac{\pi}{2} \quad j \text{ impair.} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pour la fibre, on obtient les fréquences de coupures comme racines de fonctions de Bessel de première espèce :

$$\begin{aligned} l = 0 \quad J_1 \quad \text{soit} \quad V_c = j_{1m} \\ l = 1 \quad J_0 \quad \text{soit} \quad V_c = j_{0m} \\ l \geq 2 \quad J_{l-1} \quad \text{soit} \quad V_c = j_{(l-1)(m+1)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

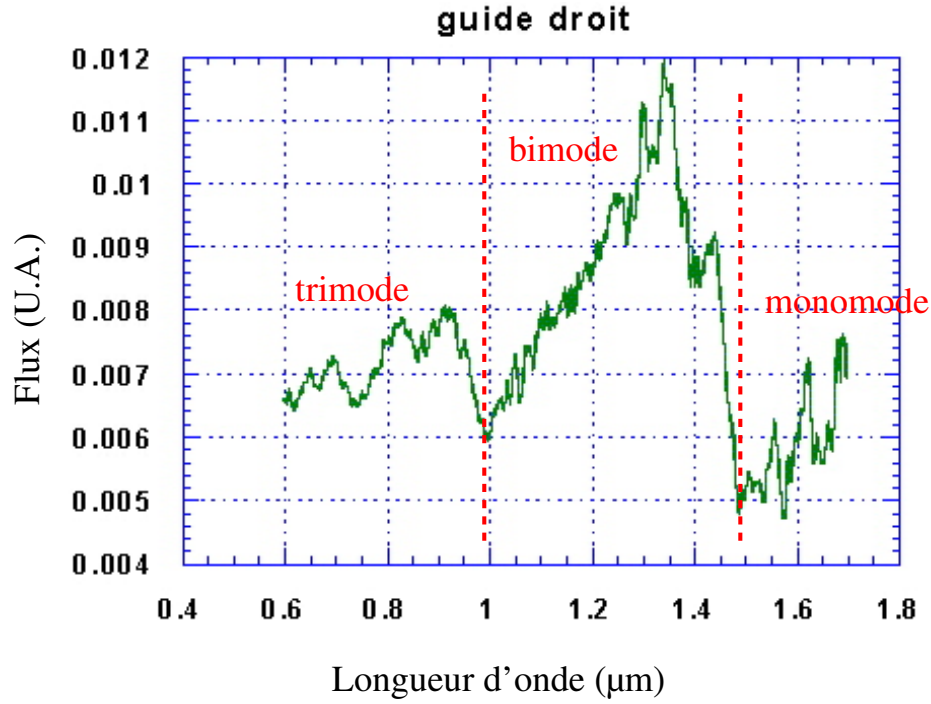


Fig. 2.10 – Etude photométrique de la transmission d’un guide droit. Mesures réalisées par Pierre Haguenauer pour la qualification de IONIC.

Tab. 2.2 – Racines tabulées des fonctions de Bessel première espèce j_{0l} .

$l \backslash m$	1	2	3	4
0	2.40482	5.520007	8.65372	11.79153
1	0	3.83171	7.01559	10.17347
2	0	5.13562	8.41724	11.61984

Tab. 2.3 – Fréquences de coupure déduites de la table 2.2 et ordonnées suivant l’équation Eq. (2.17)

$l \backslash m$	1	2	3	4
0	0	3.83171	7.01559	10.17347
1	2.40482	5.520007	8.65372	11.79153
2	3.83171	7.01559	10.17347	13.3269
3	5.13562	8.41724	11.61984	14.79595

où j_{lm} désigne la m -ième racine de la fonction de Bessel d’ordre l (attention : les racines nulles sont incluses dans le décompte pour les fonctions de degré azimutal strictement positif) dont les valeurs peuvent être tabulées (Abramovitz [2]). *Pour qu’un mode soit coupé, il faut que le paramètre de guidage du guide n’excède pas la fréquence de coupure du mode, i.e.,*

$$V < V_c \quad (2.18)$$

Il est donc possible de réduire à volonté le nombre de modes susceptibles d’être guidés, en choisissant

une valeur aussi faible que l'on veut du paramètre de guidage, à l'exception d'un seul et unique mode : le *mode fondamental du guide*. En effet ce mode est caractérisé par une fréquence de coupure nulle, et comme le paramètre de guidage est par construction strictement positif, l'inégalité précédente ne peut jamais être vérifiée. Le mode fondamental est le mode symétrique d'ordre $j = 0$ pour le guide planaire et le mode de degré azimutal nul $l = 0$ et de degré radial unitaire $m = 1$ pour la fibre. De cette particularité physique capitale, on en déduit une plage de fonctionnement *monomode* en paramètre de guidage pour le guide d'onde. Cette plage de monomodité est naturellement définie pour des valeurs inférieures à celle de la plus petite fréquence de coupure de mode non trivialement nulle. Cette dernière est associée au premier mode antisymétrique ($j=1$) pour le guide d'onde planaire et le mode d'ordre azimutal $l = 1$ et d'ordre radial $m = 1$ pour la fibre, i.e.

$$\begin{aligned} 0 < V < 1.5708 & \text{ pour le guide planaire} \\ 0 < V < 2.4048 & \text{ pour la fibre circulaire} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dans le cas d'une guide multi-modal il faut pouvoir dénombrer les modes en présence à partir de la condition de coupure. Pour le guide d'onde planaire, les fréquences de coupure de chaque mode croissent avec l'index j ce qui rend l'algorithme de recherche des modes guidés simple : tous les modes symétriques et antisymétriques d'indice inférieur à la valeur maximum doivent être analysés :

$$\max(j) = \mathcal{E}\left(\frac{2V}{\pi}\right) \quad (2.20)$$

où \mathcal{E} désigne l'opérateur partie entière. Le nombre de modes analysés est donc $\mathcal{N}(V) = \mathcal{E}(\frac{2V}{\pi}) + 1$ (on ajoute le fondamental). Pour une fibre circulaire, l'algorithme de recherche des modes guidés n'est guère plus compliqué. Les propriétés d'entrecroisement des racines des fonctions de Bessel d'ordres azimutaux consécutifs font que les fréquences de coupures sont croissantes avec le degré azimutal pour un ordre radial donné, et réciproquement. Ainsi l'examen de la condition de coupure appliquée récursivement aux fréquences de coupure du degré radial $m = 1$ renvoie la valeur maximale du degré azimutal $\max(l)$ admissible et ce même examen mené sur les fréquences de coupure du degré azimutal $l = 0$ renvoie la valeur maximale du degré radial $\max(m)$ possible. Si l'on ne peut pas prédire quelles seront exactement ces valeurs, on peut toutefois en obtenir un ordre de grandeur si la fibre est hautement multimode $V \gg 1$ en utilisant des développements limités sur les racines des fonction de Bessel,

$$\begin{cases} \max l & \simeq \mathcal{E}(V) \\ \max m & \simeq \mathcal{E}(\frac{V}{\pi}) \end{cases} \rightarrow \mathcal{N} \simeq \mathcal{E}\left(\frac{V^2}{\pi}\right). \quad (2.21)$$

2.3.4 Influence du paramètre de guidage

La seconde loi réciproque à examiner est celle qui régit l'évolution de la fréquence d'oscillation transverse κd ou l'évanescence γd , en fonction du paramètre de guidage, pour un mode donné. Cette loi pourrait-être tabulée au moyen d'une résolution numérique *exacte* des e.v.p. en parcourant l'espace des valeurs du paramètre de guidage supérieures à la fréquence de coupure du mode considéré V_c ce que notre modèle numérique peut faire. Dans la suite, je présenterai cette tabulation à partir des expressions approchées des e.v.p. obtenues par développement au premier ordre au voisinage de la coupure du mode considéré, $V = V_c$ ainsi, que au loin de cette coupure par développement asymptotique. Cette méthode a été employée initialement par Snyder. Elle est reproduite dans Marcuse [60] dans le cas le plus général, et est particularisée pour l'approximation de guidage faible dans

Marcuse [61]. De cette analyse, il ressort que pour le guide planaire, l'évanescence de gaine évolue au voisinage de la coupure comme,

$$\forall V > V_c \begin{cases} \gamma d(V) \simeq V - V_c(j) & \text{pour } j > 0 \\ \gamma d(V) \simeq \frac{1}{2}\sqrt{4V^2 + 1} - 1 & \text{pour } j = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Loin de la fréquence de coupure, on peut constater d'après le diagramme de sélection des modes guidés (Fig.2.8), que la fréquence d'oscillation transverse κd va tendre asymptotiquement vers une valeur finie avec le paramètre de guidage V qui n'est autre que la fréquence de coupure du mode suivant. Nous noterons cette valeur $V_c(\infty)$. L'évanescence de gaine s'exprime pour le guide planaire sous la forme,

$$\forall j \geq 0 \quad \gamma d(V) \simeq V \sqrt{1 - \frac{V_c(\infty)^2}{(1+V)^2}} \quad (2.23)$$

with $V_c(\infty) = V_c(j+1)$.

Par un traitement similaire mené pour une fibre circulaire, on obtient au voisinage de la coupure,

$$\begin{aligned} \forall V > V_c \\ l = 0 \quad (\gamma a)(V) &\simeq \frac{2}{\Gamma} \exp\left(-\frac{1}{V} \frac{J_0(V)}{J_1(V)}\right) \\ l = 1 \quad (\gamma a)(V) &\simeq \sqrt{\frac{2V_c(V - V_c)}{1 - 2 \log \frac{\Gamma(\gamma a)}{2}}} \\ l \geq 2 \quad (\gamma a)(V) &\simeq \sqrt{\frac{2(l-1)}{l}} V_c(V - V_c), \end{aligned} \quad (2.24)$$

où $\Gamma = 1.781672$ est la constante d'Euler. Pour les modes de degré azimutal unitaire la loi approchée est encore obtenue sous une forme implicite, mais cette dernière est plus simple que l'e.v.p. initiale : elle peut être plus aisément explicitée graphiquement. Il faut juste prendre soin à inverser la relation $\gamma a = \gamma a(V)$ sur un domaine de définition où elle est bijective, i.e, sur $V \in [V_c, V_c + \frac{2}{\Gamma^2 V_c}] \rightarrow \gamma a \in [0, \frac{2}{\Gamma}]$. Loin de la fréquence de coupure, la fréquence d'oscillation transverse κa sature au niveau d'une valeur $V_c(\infty)$ qui n'est autre que la fréquence de coupure du mode de même d'ordre radial mais d'ordre azimutal immédiatement supérieur (fréquence de coupure immédiatement supérieure). Le comportement de l'évanescence se dérive alors sous la forme,

$$\begin{aligned} l > 0 \quad \gamma a(V) &\simeq \sqrt{V^2 - V_c(\infty)^2} \left(1 - \frac{2l}{V}\right)^{\frac{1}{l}} \\ l = 0 \quad \gamma a(V) &\simeq \sqrt{V^2 - V_c(\infty)^2} \exp\left(-\frac{2}{V}\right) \\ \text{with } V_c(\infty) &= V_c(l+1, m). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nous voyons donc qu'il est possible (c.f. Fig.2.11, Fig.2.12, Fig.2.13, Fig.2.14) de tabuler l'évanescence de gaine (ou la fréquence d'oscillation transverse) pour chaque mode guidé en fonction du paramètre de guidage V . La méthode utilisée consiste raccorder par interpolation deux développements de cette loi d'évolution obtenus au voisinage et au loin de la coupure du mode considéré. Ce faisant, il est certain que l'on risque de commettre une erreur sur une certaine plage de valeurs du paramètre de guidage située hors des domaine d'applicabilité des approximations réalisées respectivement $\gamma a \ll 1$

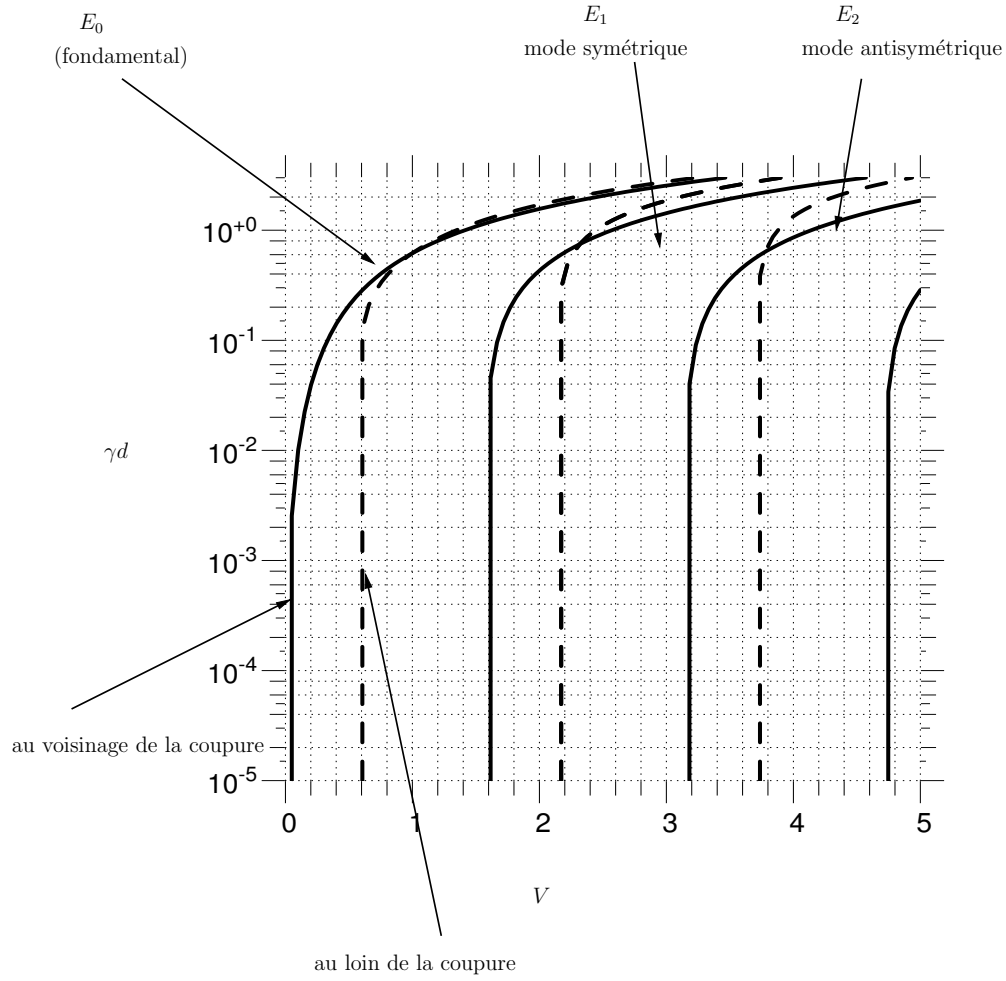


Fig. 2.11 – Evolution de l'évanescence de gaine γd pour les modes guidés du guide planaire, en fonction du paramètre de guidage V . La fonction est obtenue par une solution de l'e.v.p au voisinage d'une fréquence de coupure V_c donnée (trait plein) et raccordée au loin par une solution asymptotique de l'e.v.p (trait pointillé).

$\gamma a \gg 1$, c'est à dire dans la zone de raccordement des solutions, typiquement $\gamma a \simeq 1$. La définition de la zone de raccordement ainsi que la méthode d'interpolation utilisée souffrent d'un arbitraire : c'est le prix que devra payer tout numéricien désireux de simuler le comportement multi-mode d'un guide d'onde, en faisant l'économie d'une résolution exacte des e.v.p. associées aux modes guidés.

En revanche, on constate que pour le mode fondamental de la fibre circulaire, ou du guide planaire, les deux solutions approchées se raccordent presque continûment (c.f. Fig.2.11 et Fig.2.12). Pour la fibre circulaire, Marcuse [60] montre que l'écart des approximations au profil exact (calculé numériquement point par point pour la démonstration) n'excède pas 7% à $V = 1.5$. A cette ordre de précision près, on peut "mettre bout à bout" les deux solutions limites directement. Ce type de raccordement est illustré sur la figure Fig.2.15. Lorsque l'on raisonne en termes de constante de propagation axiale plutôt qu'en termes d'évanescence ou de fréquence d'oscillation transverse, il est d'usage

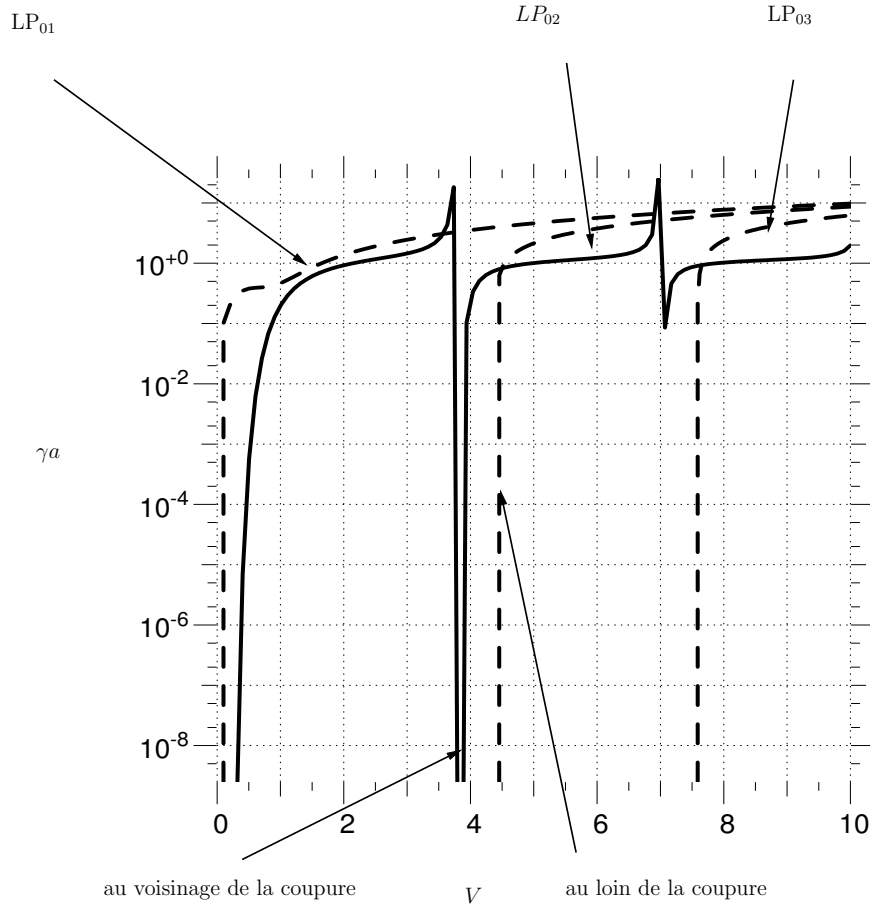


Fig. 2.12 – Evolution de l'évanescence de gaine γa pour la famille de modes d'ordre azimutaux nuls $l = 0$ guidés par une fibre optique circulaire, en fonction du paramètre de guidage V . La fonction est obtenue par une solution de de l'e.v.p au voisinage d'une fréquence de coupure V_c donnée (trait plein) et raccordée au loin par une solution asymptotique de l'e.v.p. (trait pointillé)

d'employer la notion de *constante de propagation normalisée* définie comme suit pour chaque mode,

$$b(V) = \frac{|\beta|^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} \begin{cases} = \frac{(\gamma d)^2(V)}{V^2} & \text{pour le guide planaire} \\ = \frac{(\gamma a)^2(V)}{V^2} & \text{pour la fibre.} \end{cases} \quad (2.26)$$

L'inégalité donnée en Eq. (2.4) se traduit en l'inégalité $0 < b < 1$. Lorsque pour un mode donné $b \rightarrow 0$, ce dernier se situe à la coupure et ne peut plus être guidé par la structure diélectrique. La relation Eq. (2.26) est illustrée sur la figure Fig.2.16 pour le mode fondamental d'une fibre circulaire.

2.3.5 Interprétation physique

La coupure des modes guidés en constante de possède une interprétation géométrique simple. Dans le coeur, l'amplitude du vecteur d'onde $k = k_1$ et la direction de propagation du mode avec l'axe optique est définie par la donnée de l'angle $\theta = \text{acos}(\frac{\beta}{k_1})$. A la coupure, $V \rightarrow V_c$, $\beta \rightarrow k_2$, et $\theta \rightarrow \theta_c = \text{acos}(\frac{k_2}{k_1})$. L'angle critique atteint est l'angle de réflexion totale à l'interface du coeur et de la gaine. La condition de coupure $V < V_c$ est donc équivalente à dire qu'un mode n'est plus guidé dès

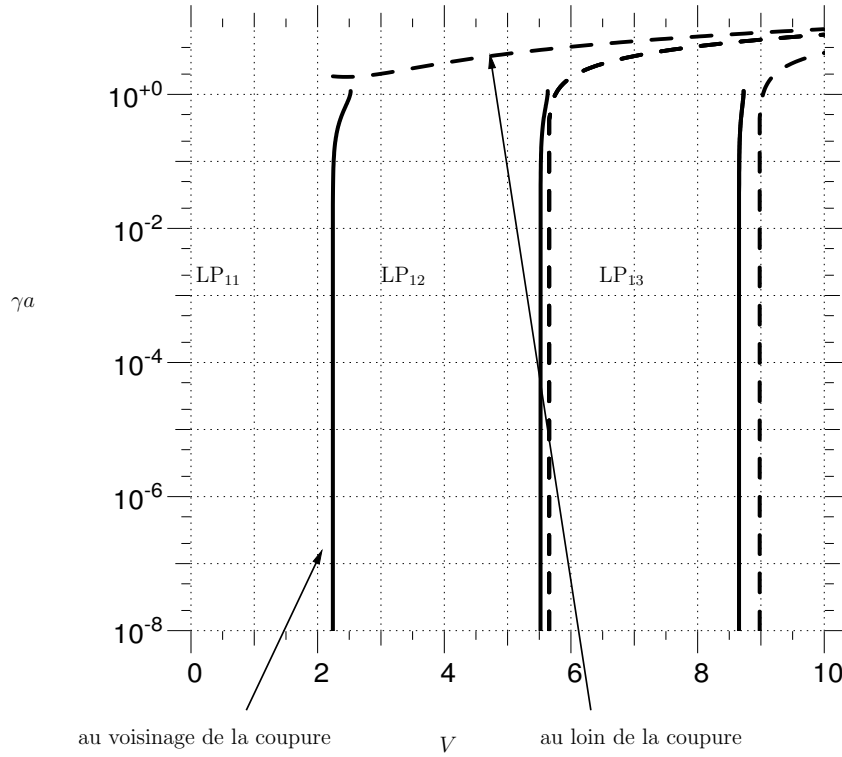


Fig. 2.13 – Evolution de l'évanescence de gaine γa pour la famille de modes d'ordre azimutaux $l = 1$ guidés par une fibre optique circulaire, en fonction du paramètre de guidage V . La fonction est obtenue par une solution de de l'e.v.p au voisinage d'une fréquence de coupure V_c donnée (trait plein) et raccordée au loin par une solution asymptotique de l'e.v.p. (trait pointillé)

lors que sa direction de propagation associée dans le coeur excède cet angle critique de réflexion totale. Autrement dit on retrouve le fait que les modes guidés sont bien les enfants d'un mécanisme réflexion totale. L'évanescence de gaine s'interprète d'ailleurs comme un effet tunnel optique à l'interface. Cet effet tunnel est bel et bien prévu par la théorie classique électromagnétique des lois la réflexion et de la réfraction de Snell-Decartes, Born & Wolf [10]. Comme le montrent les courbes d'évolution de l'évanescence avec le paramètre de guidage cet effet tunnel augmente à mesure que l'on se rapproche de de la fréquence de coupure l'angle de réflexion totale. Au voisinage de la coupure le mode se détache spatialement du coeur du guide.

Dans le même ordre d'idées, la quantification discrète du spectre en constante de propagation axiale est géométriquement interprétable en une quantification des directions de propagation des modes guidés avec l'axe optique. En constatant que les modes guidés du guide planaire sont produits par une superposition d'ondes planes de directivité $\pm\theta$ avec l'axe optique (piégées par réflexion totale donc), certains auteurs] ont montré simplement que l'origine de la quantification de ces directions était due à une condition d'interférences constructives entre ces deux ondes dans la longueur du guide. Cependant, il semble plus délicat d'obtenir l'équivalence de ces points de vue en ce qui concerne les modes guidés de la fibre optique.

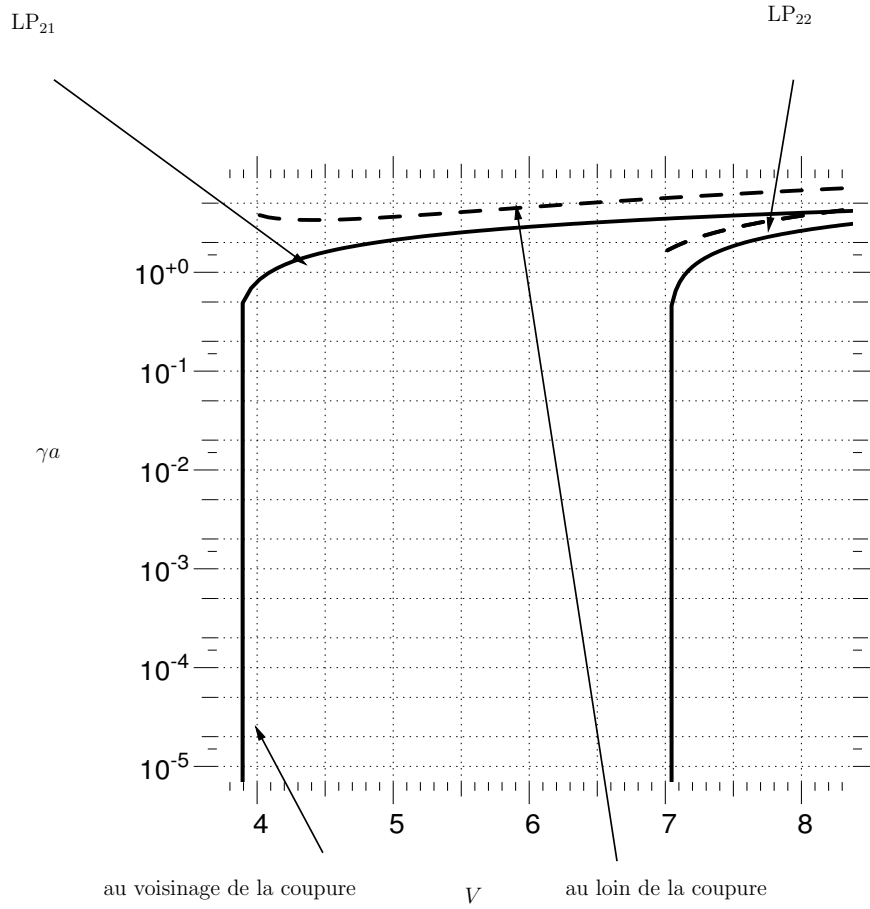


Fig. 2.14 – Evolution de l'évanescence de gaine γa pour la famille de modes d'ordre azimutaux $l = 2$ guidés par une fibre optique circulaire, en fonction du paramètre de guidage V . La fonction est obtenue par une solution de de l'e.v.p au voisinage d'une fréquence de coupure V_c donnée (trait plein) et raccordée au loin par une solution asymptotique de l'e.v.p. (trait pointillé)

2.4 Le Continuum spectral

En plus des modes guidés par la structure, il existe une seconde famille de solutions modales à l'équation de Helmholtz du guide. Cette famille est caractérisée par une constante de propagation axiale à *valeur réelle* comprise dans l'intervalle,

$$0 < |\beta| < k_2 \quad (2.27)$$

La particularité de ces modes rayonnés tient à la valeur positive de la fréquence spatiale d'oscillation $\kappa^2 > 0$ dans tout le domaine transverse du guide d'onde. La conséquence physique majeure est que ces modes, contrairement aux modes guidés possèdent une structure spatiale oscillante sur tout le domaine transverse sans évanescence de gaine. Nous distinguerons donc entre la fréquence d'oscillation dans le coeur et dans la gaine,

$$\begin{aligned} \kappa = \sigma &= \sqrt{k_1^2 - \beta^2} && \text{dans le coeur} \\ \kappa = \rho &= \sqrt{k_2^2 - \beta^2} && \text{dans la gaine.} \end{aligned} \quad (2.28)$$

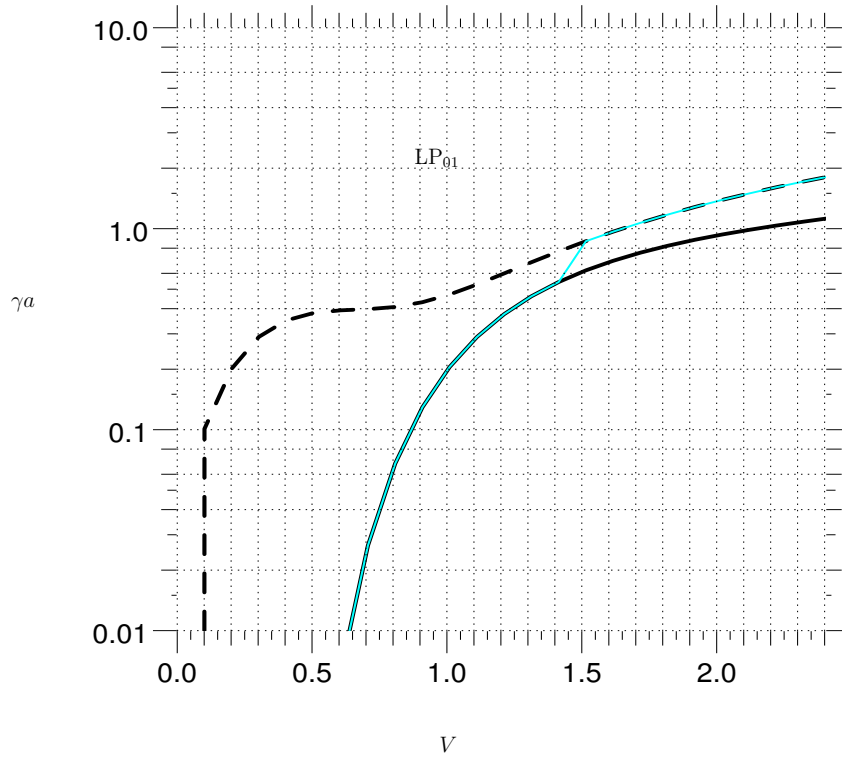


Fig. 2.15 – Evolution de l'évanescence de gaine γa pour la famille de modes d'ordre azimutaux $l = 2$ guidés par une fibre optique circulaire, en fonction du paramètre de guidage V . La fonction est obtenue par une solution de de l'e.v.p au voisinage d'une fréquence de coupure V_c donnée (trait plein) et raccordée au loin par une solution asymptotique de l'e.v.p. (trait pointillé)

2.4.1 Cartes transverses

La solution générale de l'équation de Helmholtz pour les modes rayonnés du guide planaire est toujours décomposable, comme pour les modes guidés, en une famille de modes symétriques et une famille de modes antisymétriques suivant l'axe transverse du guide,

$$e = B \begin{cases} \cos(\sigma x) & |x| < d \\ \sin(\sigma x) & |x| < d \end{cases} \quad (2.29)$$

$$e = A^- \exp(-i(\rho|x|)) + A^+ \exp(i(\rho|x|)) \quad |x| > d.$$

Les conditions de continuité de classe \mathcal{C}^1 à l'interface se traduisent par deux équations pour un système à trois inconnues (constantes indéterminées) complexes. Les modes rayonnés sont définis à deux degrés de liberté près, i.e une phase constante et une amplitude. Nous imposerons arbitrairement la réalité des cartes radiales générées⁹—($B \in \mathbb{R}$)—ce qui fixe la phase, tandis que l'amplitude sera à relier à la

⁹La fonction d'onde normalisée de l'optique quantique est toujours définie aune phase arbitraire près

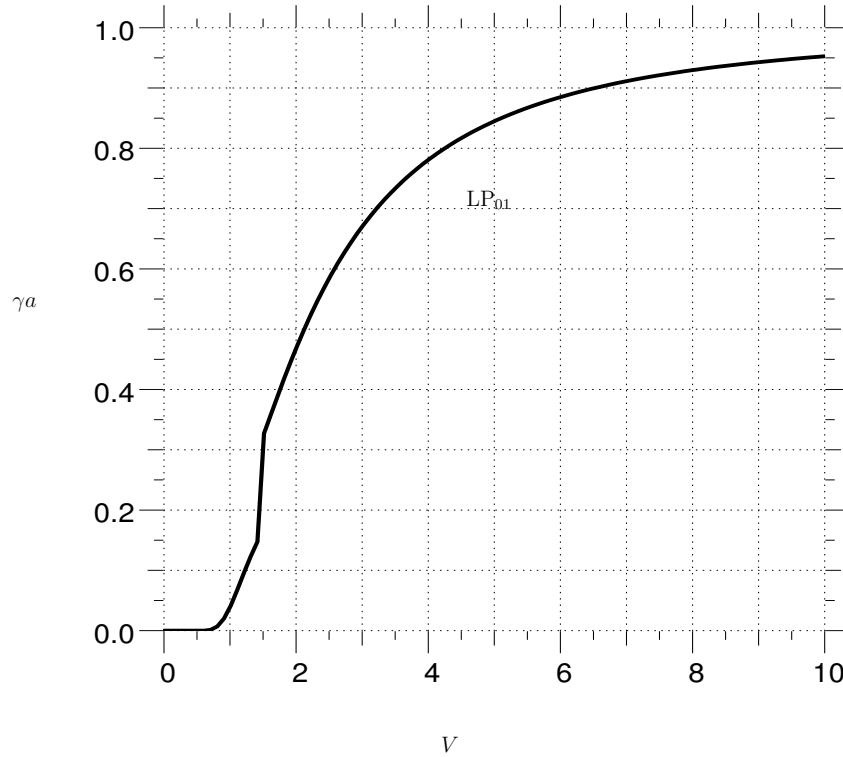


Fig. 2.16 – Evolution de la constante de propagation normalisée du mode fondamental b_{01} avec le paramètre de guidage.

puissance optique transportée par le mode sur l'axe du guide (c.f. section Norma),

$$\begin{cases} \frac{A^-}{B} = \frac{1}{2} \exp i(\rho|d|)(\cos \sigma d - i \frac{\sigma}{\rho} \sin(\sigma d)) \\ A^+ = A^{-*} \end{cases} \quad \text{modes symétriques} \\
 \begin{cases} \frac{A^-}{B} = \frac{1}{2} \exp i(\rho|d|)(\cos \sigma d + i \frac{\sigma}{\rho} \sin(\sigma d)) \\ A^+ = A^{-*} \end{cases} \quad \text{modes antisymétriques.}
 \end{cases} \quad (2.30)$$

Les conditions de continuité (sous-numéraires par rapport aux nombre de degrés de liberté indéterminés) ne conduisent pas, comme dans le cas des modes guidés à une équation aux valeurs propres discrétisant le spectre des solutions admissibles en constante de propagation axiale. Ainsi, toutes les valeurs situées dans l'intervalle précité sont possibles. Le spectre des modes rayonnés forme *un continuum*.

Pour la fibre optique la solution générale s'exprime dans un système de coordonnées polaires comme une certaine fonction cylindrique d'ordre azimutal l modulée harmoniquement symétriquement ou antisymétriquement suivant l'azimut,

$$\begin{aligned} e(r, \phi) &= B J_l(\sigma r) \begin{cases} \cos(l\phi) \\ \sin(l\phi) \end{cases} \quad |x| < a \\ e(r, \phi) &= A^+ H_l^+(\rho r) + A^- H_l^-(\rho r) \begin{cases} \cos(l\phi) \\ \sin(l\phi) \end{cases} \quad |x| > a. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Que ce soit dans le coeur ou dans la gaine, le champ électromagnétique est modulé radialement suivant

une fonction cylindrique solution de l'équation de Bessel radiale, pendant de l'équation de Helmholtz, en coordonnées cylindriques. Dans le coeur, la solution s'exprime comme pour les modes guidés à l'aide d'une fonction de Bessel de première espèce d'ordre l J_l . Dans la gaine, la solution apparait comme la superposition de deux ondes dont la dépendance radiale est donnée par des fonctions de Hankel d'ordre l H_l^+ et H_l^- conjuguées l'une de l'autre. La encore, les conditions de continuité de classe \mathcal{C}^1 ne suffisent pas à lever toutes les inconnues. Elles conduisent au système d'équations,

$$\begin{aligned}\frac{A^-}{B} &= \frac{1}{\rho} \frac{\sigma \dot{J}_l(\sigma a) H_l^+(\rho a) - \rho J_l(\sigma a) \dot{H}_l^+(\rho a)}{H_l^+(\rho a) \dot{H}_l^{+*}(\rho a) - H_l^+(\rho a) \dot{H}_l^{+*}(\rho a)} \\ \frac{A^+}{B} &= \frac{1}{\rho} \frac{\sigma \dot{J}_l(\sigma a) H_l^{+*}(\rho a) - \rho J_l(\sigma a) \dot{H}_l^{+*}(\rho a)}{H_l^{+*}(\rho a) \dot{H}_l^+(\rho a) - \dot{H}_l^{+*}(\rho a) H_l^+(\rho a)}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Une fois encore, on peut fixer la phase du mode en imposant la réalité de la carte radiale d'un mode rayonné¹⁰. Compte-tenu de la relation de conjugaison complexe existant entre les fonctions de Hankel ceci implique,

$$B \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad A^+ = A^{-*} \quad (2.33)$$

Les équations de continuité peuvent être formulées de manière plus simple. On peut tout d'abord éliminer les dérivées premières de celles-ci en utilisant la relation de récurrence sur la dérivée d'une fonction cylindrique,

$$\dot{Z}_l(x) = \frac{1}{2}(Z_{l-1}(x) - Z_{l+1}(x)), \quad (2.34)$$

et injecter le Wronskien au dénominateur,

$$H_{l+1}^+(x) H_l^-(x) - H_l^+(x) H_{l+1}^-(x) = \frac{4}{i\pi x}, \quad (2.35)$$

ce qui conduit à l'expression,

$$\begin{aligned}\frac{A^-}{B} &= \frac{-i\pi a}{8} (\sigma J_{l+1}(\sigma a) H_l^+(\rho a) - \rho J_l(\sigma a) H_{l+1}^+(\rho a)) \\ &\quad + \frac{i\pi a}{8} (\sigma J_{l-1}(\sigma a) H_l^+(\rho a) - \rho J_l(\sigma a) H_{l-1}^+(\rho a)) \\ \frac{A^-}{B} &= \frac{A^{-*}}{B}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

On peut dans un dernier temps montrer que les termes intervenant de part et d'autre de la somme précédente sont égaux. Pour ce faire il faudra utiliser une autre relation de récurrence sur les fonctions cylindriques,

$$Z_{l-1}(x) + Z_{l+1}(x) = \frac{2l}{x} Z_l(x). \quad (2.37)$$

Ainsi, la continuité de classe \mathcal{C}^1 d'un mode sera donc formulée sous la forme définitive,

$$\begin{aligned}\frac{A^-}{B} &= \frac{-i\pi a}{4} (\sigma J_{l+1}(\sigma a) H_l^+(\rho a) - \rho J_l(\sigma a) H_{l+1}^+(\rho a)) \\ \frac{A^+}{B} &= \frac{A^{-*}}{B}.\end{aligned}\quad (2.38)$$

De manière analogue au guide planaire, on pourra toujours choisir de normaliser le mode rayonné obtenu au sens d'un produit scalaire convenablement choisi dans le plan transverse du guide, c'est à dire normaliser la puissance optique qu'il développe sur l'axe, c.f. Sect.2.5.

¹⁰La fonction d'onde normalisée de l'optique quantique est toujours définie à une phase arbitraire près

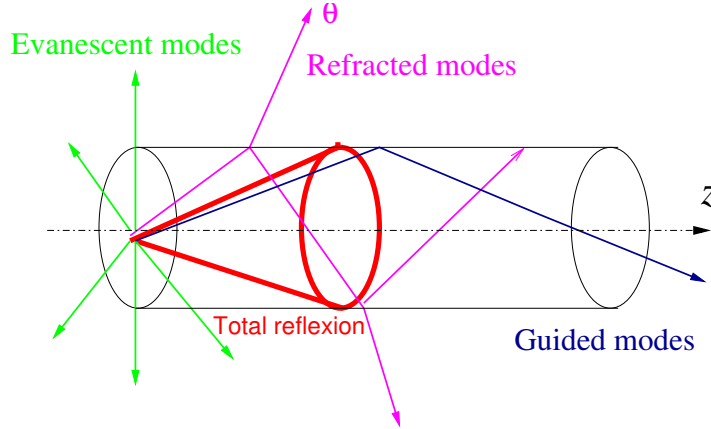


Fig. 2.17 – Interprétation géométrique des modes guidés et rayonnés par un guide d'onde. Les modes guidés sont construits par un mécanisme de réflexion totale à l'intérieur du coeur. Les modes rayonnés sont construits par une mécanisme de réflexion partielle dans le coeur et de réfraction partielle dans la gaine.

2.4.2 Interprétation physique

De par leur classification spectrale en constante de propagation, il apparaît que les modes rayonnés sont interprétés comme des ondes qui échappent au mécanisme de réflexion totale à l'interface du coeur et de la gaine du guide d'onde. Leur direction de propagation avec l'axe optique dans le coeur est définie sur la base d'une relation analogue à celle livrée pour les modes guidés, $\theta = \arccos(\frac{|\beta|}{k_1})$. Pour ces modes, cette direction excède l'angle critique de réflexion totale, i.e, $\theta > \theta_c$. Ces modes sont en fait réfractés partiellement dans la gaine, dans laquelle ils se propagent selon une direction $\theta' \arccos(\frac{\beta}{k_2})$ avec l'axe du guide. On peut d'ailleurs noter que les cartes transverses des modes du guide planaire (symétriques ou antisymétriques) s'obtiennent dans le coeur comme combinaison linéaire de deux ondes planes de direction $\pm\theta$. Dans la gaine, la structure d'un mode s'obtient comme la superposition de deux ondes planes réfractées selon la direction $\pm\theta'$.

2.5 Orthonormalisation

Nous avons vu que la théorie générale décrivant la propagation au sein d'un guide d'onde prévoit l'existence d'une classe de solutions modales appelés modes guidés et une classe de modes rayonnés. Nous avons donné l'expression des cartes transverses de ces modes. Ces cartes sont définies à une constante arbitraire, B dont la valeur a été choisie dans \mathbb{R} . Cette constante donne l'amplitude d'un mode. Dans l'approximation de guidage faible, son carré peut-être relié directement à la puissance lumineuse transportée par le mode suivant l'axe du guide. Nous avons déjà mentionné que les modes propagés dans une fibre optique ou d'un guide d'onde planaire sont orthogonaux entre eux. Une démonstration générale de ce résultat, fondée sur le théorème de réciprocité de Lorentz est présentée dans Marcuse [60]. pour les modes d'un système optique à symétrie cylindrique. Le problème théorique n'est donc pas tant de montrer l'orthogonalité des solutions modales entre-elles mais plutôt de fournir un calcul explicite de la puissance transportée, c'est à dire de la normalisation d'un mode donné. La

puissance optique rayonnée par un mode dans la direction de l'axe optique est donnée par le flux du vecteur de Poynting associé au mode électromagnétique d'amplitude complexe \mathbf{E}, \mathbf{H} à travers le plan transverse du guide,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{z} dS \\ &= \frac{1}{2} \frac{\beta}{\mu\omega} \int e e^* dS \end{aligned} \quad (2.39)$$

ou μ est la perméabilité magnétique du vide. Dans la deuxième ligne de l'équation précédente, il a été tenu compte de la dépendance axiale harmonique d'un mode et de l'approximation d'onde quasi-transverse consistante avec l'hypothèse de guidage faible. La puissance optique s'obtient à un facteur près comme le carré de la norme euclidienne au d'une carte transverse $\|e\|^2 = e|e$ définie a sens du produit scalaire $\langle e|e' \rangle = \int e e'^* dS$. Nous choisirons cette norme euclidienne comme une mesure de la puissance lumineuse transmise par un mode. On pourra alors normaliser les cartes de champ transverses au sens de cette norme, c'est à dire choisir l'amplitude de la carte B de telle sorte que le produit $\frac{2\omega\mu P}{\beta}$ soit unitaire. Par généralisation, nous définissons la projection orthogonale entre deux modes électromagnétiques d'amplitude complexe \mathbf{E}, \mathbf{H} et \mathbf{E}', \mathbf{H}' distincts, comme l'intégrale de recouvrement dans le plan transverse du guide,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{z} dS \\ &= \frac{1}{2} \frac{\beta}{\mu\omega} \langle e'|e \rangle. \end{aligned} \quad (2.40)$$

L'orthogonalité de deux modes quelconques s'exprime simplement par une relation générique du type,

$$I = P \delta_{e'}^e. \quad (2.41)$$

En normalisant les modes au sens du produit scalaire euclidien sur le plan transverse, elle s'exprimera simplement sous la forme du produit scalaire euclidien,

$$\langle e'|e \rangle = \delta_{e'}^e, \quad (2.42)$$

que ce soit pour le continuum des modes rayonnés (où $\delta_{e'}^e$ représente alors une distribution singulière de Dirac sur l'espace spectral ($\delta_{e'}^e = \delta(\rho - \rho')$) ou bien pour le spectre discret des modes guidés (où $\delta_{e'}^e$ représente alors un symbole de Kronecker).

Modes guidés

Pour les modes guidés du guide planaire ou de la fibre optique on peut obtenir la puissance P par un calcul direct de l'intégrale Eq. (2.39). Pour les modes symétriques ou antisymétriques du guide planaire, on obtient ([60]),

$$B^2 = \frac{2\omega\mu P}{\beta} \frac{1}{d + \frac{1}{\gamma_2}}. \quad (2.43)$$

En choisissant B de telle sorte que $\frac{P2\omega\mu}{\beta} = 1$, il vient,

$$B^2 = \frac{1}{d + \frac{1}{\gamma}}. \quad (2.44)$$

Pour les modes guidés de la fibre optique, nous adopterons un résultat livré dans (Gatak [35]),

$$B^2 = \frac{2\omega\mu P}{\beta} \frac{(\gamma a)^2}{(\kappa a)^2} \frac{1}{v_l \pi a^2} \frac{K_l(\gamma a)^2}{K_{l+1}(\gamma a) K_{l-1}(\gamma a)} \quad \text{avec} \quad v_l \begin{cases} v_l = 2 & \text{pour } l = 0 \\ v_l = 1 & \text{pour } l \neq 0, \end{cases} \quad (2.45)$$

soit, en choisissant B de telle sorte que $\frac{2\omega\mu P}{\beta} = 1$,

$$B^2 = \frac{(\gamma a)^2}{(\kappa a)^2} \frac{1}{v_l \pi a^2} \frac{K_l(\gamma a)^2}{K_{l+1}(\gamma a) K_{l-1}(\gamma a)} \quad \text{avec} \quad v_l \begin{cases} v_l = 2 & \text{pour } l = 0 \\ v_l = 1 & \text{pour } l \neq 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Modes rayonnés

La normalisation des modes rayonnés est plus difficile à établir mathématiquement à cause de l'aspect continu de leur distribution en constante de propagation axiale. Le seul moyen d'obtenir la norme d'un mode rayonné, c'est de mettre en évidence la présence d'une distribution singulière de Dirac sur l'espace spectral dans le développement de l'équation Eq. (2.40). Marcuse [60] parvient à le faire en ce qui concerne les modes rayonnés du guide planaire (symétriques ou antisymétriques), et dérive la puissance optique par unité de longueur dans la direction invariante du champ sous la forme,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dy} &= P \delta_{e'} \\ P &= \frac{\beta}{2\omega\mu} \pi |B|^2 (\cos^2(\sigma d) + \sin^2(\sigma d) \frac{\sigma d}{\rho^2}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

En revanche, il ne s'attaque pas au problème de la normalisation des modes rayonnés de la fibre optique. Nous avons donc développé une méthode de calcul générale permettant d'évaluer rapidement la projection scalaire entre deux modes distincts du guide que ce soit modes guidés ou modes rayonnés. Pour prouver la consistance de cette méthode, nous appliquons cette technique au cas du guide d'onde planaire à saut d'indice retrouvons l'orthogonalité de deux modes guidés distincts entre eux. La méthode est ensuite extrapolée au cas d'une fibre optique circulaire dans l'approximation de guidage faible.

Pour ce faire, je me suis tout d'abord inspiré d'une démonstration analogue à celle employée par Helmholtz-Kirchoff pour aboutir à leur théorème intégral sur la diffraction des ondes scalaires en espace libre, théorème qui, conjugué avec des conditions aux limites adéquates sur le plan d'une ouverture, permet une formulation mathématique de la diffraction simple et consistante avec le principe de diffraction Huygens-Fresnel. Nous renvoyons le lecteur à la référence Born & Wolf [10] pour de plus amples explications. Pourquoi utiliser cette analogie? Parce qu'à l'instar de l'onde scalaire en espace libre, les modes sont aussi gouvernés par l'équation de Helmholtz dans le plan transverse du guide. Supposons alors que l'on se donne deux solutions de l'équation Eq. (2.3) correspondant à deux constantes de propagation distinctes κ' et κ ,

$$\begin{aligned} \nabla e' + \kappa'^2 e' &= 0 \\ \nabla e + \kappa^2 e &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

En conjuguant la seconde équation du système précédent, en multipliant respectivement chacune des équations par l'amplitude complexe symétrique et en soustrayant les deux équations, on dérive l'équation suivante,

$$\begin{aligned} e' e^* &= \frac{-1}{(\kappa^2 - \kappa'^2)} (e' \nabla e^* - e^* \nabla e') \\ \kappa &\neq \kappa'. \end{aligned} \quad (2.49)$$

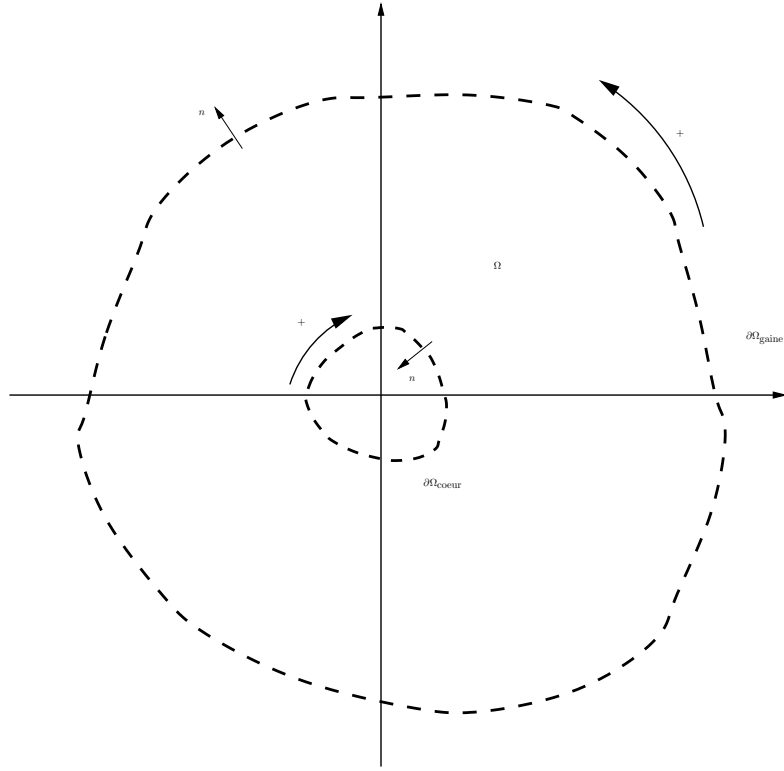


Fig. 2.18 – Domaines d'intégration utilisés dans le plan transverse du guide pour l'application du théorème de Green.

Dans le cas d'un guide d'onde à saut d'indice, la différence des fréquences spatiales n'est pas dépendante de la stratification transverse en indice optique (coeur-gaine), mais seulement de la différence des carré des constantes de propagation axiales. L'équation obtenue s'intègre sur un domaine ouvert connexe du plan transverse Ω , sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} e' e^* dS = \frac{1}{(\kappa'^2 - \kappa^2)} \int (e' \nabla e^* - e^* \nabla e') dS. \quad (2.50)$$

On peut faire appel à la seconde forme du théorème intégral de Green pour transformer l'intégrale de surface en une intégrale curviligne évaluée sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine d'intégration orienté par sa normale extérieure n ,

$$\int_{\Omega} e' e^* dS = \frac{1}{(\kappa'^2 - \kappa^2)} \int_{\partial\Omega} (e' \frac{\partial e^*}{\partial n} - e^* \frac{\partial e'}{\partial n}) dl. \quad (2.51)$$

Supposons que le domaine soit limité extérieurement par une frontière de gaine $\partial\Omega_{\text{gaine}}$ et intérieurement par une frontière de coeur $\partial\Omega_{\text{coeur}}$, mutuellement disjointes, c'est-à-dire $\partial\Omega_{\text{coeur}} \cap \partial\Omega_{\text{gaine}} = \emptyset$, la frontière globale s'exprimant comme une réunion de ces dernières $\partial\Omega = \partial\Omega_{\text{coeur}} \cup \partial\Omega_{\text{gaine}}$. Nous pouvons alors scinder l'intégrale de contour en,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e' e^* dS &= \frac{1}{(\kappa'^2 - \kappa^2)} \int_{\partial\Omega_{\text{coeur}}} (e' \frac{\partial e^*}{\partial n} - e^* \frac{\partial e'}{\partial n}) dl \\ &+ \frac{1}{(\kappa'^2 - \kappa^2)} \int_{\partial\Omega_{\text{gaine}}} (e' \frac{\partial e^*}{\partial n} - e^* \frac{\partial e'}{\partial n}) dl. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nous envisageons maintenant l'extension de l'intégrale de gauche à l'ensemble du plan transverse, c'est à dire au produit scalaire entre les deux cartes transverses comme le passage à la limite noté symboliquement d'une frontière extérieure illimitée et d'une frontière interne réduite à l'origine du plan, ce que nous noterons symboliquement,

$$\begin{aligned} \langle e' | e \rangle = & \frac{1}{(\kappa'^2 - \kappa^2)} \int_{\partial\Omega_{\text{coeur} \rightarrow 0}} (e' \frac{\partial e^*}{\partial n} - e^* \frac{\partial e'}{\partial n}) dl \\ & + \frac{1}{(\kappa'^2 - \kappa^2)} \int_{\partial\Omega_{\text{gaine} \rightarrow \infty}} (e' \frac{\partial e^*}{\partial n} - e^* \frac{\partial e'}{\partial n}) dl. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Les modes étant des solutions physiquement acceptables de l'équation de Helmholtz mono ou bidimensionnelle, ils sont continument différentiables jusqu'à l'ordre 2, admettent une valeur nulle et/ou nécessairement extrême à l'origine du plan transverse. Dans tous les cas ou le champ est nul (mode anti-symétrique) ou sa dérivée première (mode symétrique) est nulle à l'origine. Ainsi, le lecteur sera vite convaincu que par le jeu d'une telle construction, l'intégrale de contour sur la frontière interne s'annule lors du passage à la limite. Ainsi nous obtenons un résultat d'une portée assez générale : le produit scalaire entre deux modes ne dépend que de leur structure spatiale à l'infini dans la gaine du guide. Traduit en termes de puissance optique, il vaut :

$$I = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\mu\omega} \langle e' | e \rangle = \frac{\beta}{2\mu\omega} \frac{1}{(\kappa'^2 - \kappa^2)} \int_{\partial\Omega_{\text{gaine} \rightarrow \infty}} (e' \frac{\partial e^*}{\partial n} - e^* \frac{\partial e'}{\partial n}) dl. \quad (2.54)$$

Sur la base de cette formule on pourrait établir toutes les relations d'orthogonalité c'est à dire entre deux modes guidés, entre un mode guidés et un mode rayonné, enfin entre deux modes. Le chemin d'intégration pour les modes du guide planaire est présenté sur la figure Fig. et se réduit trivialement à deux droites situées symétriquement au loin de l'axe de symétrie du guide perpendiculaire à la direction de la stratification en indice optique (Les dérivées normales étant identiquement nulles sur tout axe parallèle à cette même direction).

Commençons par tester la méthode pour les modes rayonnés du guide planaire, avec le contour d'intégration spécifié sur la figure Fig.2.19. Seules les portions de l'intégrale de contour dirigées dans la direction perpendiculaire à la direction de stratification en indice du guide participent à l'intégrale, les dérivées premières du champ suivant la direction orthogonale étant nulles. En injectant la forme du champ définie par l'équation Eq. (2.29) dans l'intégrale de l'Eq. (2.54), il vient, en ne conservant dans le développement que les ondes conjuguées l'une de l'autre susceptibles de former dans une distribution de Dirac sur la différence $\rho' - \rho$ dans le résultat final, sur un contour situé en x ,

$$\int_{+\infty}^{-\infty} (e' \frac{\partial e^*}{\partial n} - e^* \frac{\partial e'}{\partial n}) dy = \int 2(\rho + \rho') A^+(\rho) A^-(\rho') \sin(\rho' - \rho) x dy + \dots \quad (2.55)$$

où, ϕ_A^\pm désigne la phase de l'amplitude complexe A^\pm . Sur le contour symétrique $x \rightarrow -x$ renvoie la même valeur, le sens de l'intégrale étant opposée. L'intensité finale en utilisant $\kappa'^2 - \kappa^2 = \rho'^2 - \rho^2$, s'exprime alors par :

$$I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2\mu\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} 4(\rho + \rho') A^+(\rho) A^-(\rho') \frac{\sin(\rho - \rho')x}{\rho - \rho'} dy \quad (2.56)$$

En faisant tendre la frontière à l'infini, $\lim_{x \rightarrow \infty}$ on forme une distribution de Dirac singulière, puisque,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(\rho' - \rho)x}{\rho' - \rho} = \pi \delta(\rho' - \rho) \quad (2.57)$$

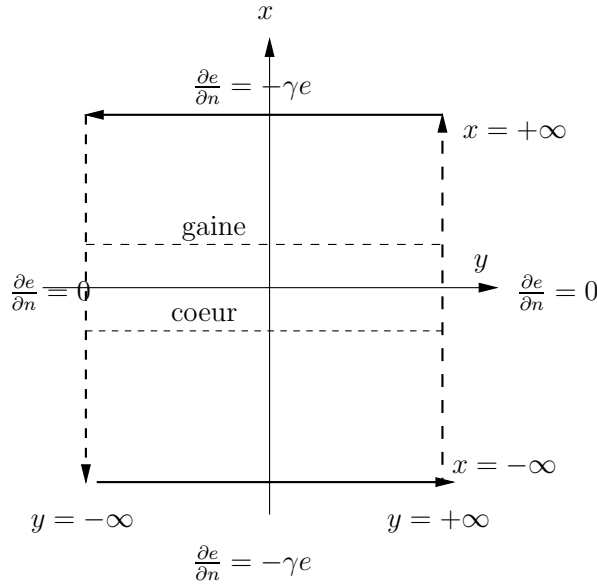


Fig. 2.19 – Contour d'intégration pour les modes du guide planaire.

L'intégrale

on obtient donc,

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\beta}{2\mu\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi |A^{\pm}(\rho)|^2 \delta(\rho' - \rho) \quad (2.58)$$

En injectant la relation de continuité du champ à l'interface cœur-gaine Eq. (2.30), nous retrouvons la bonne normalisation livrée par l'Eq. (2.47). Nous disposons d'une méthode de normalisation consistante avec le résultat énoncé par Marcuse, pour les modes rayonnés du guide planaire.

À présent, nous envisageons le calcul du produit scalaire entre deux modes rayonnés (pairs ou impairs en azimuth) de la fibre optique d'ordre azimuthaux (l, l') et de fréquences spatiales dans la gaine (ρ, ρ') distinctes. Le contour d'intégration requis est un cercle de rayon r dans le plan transverse, c.f. Fig.2.20. En injectant l'expression générale des cartes transverses associées dans la gaine, dans l'équation de le produit scalaire générale Eq. (2.40) et en intégrant sur la coordonnée azimuthale, nous exprimons l'orthogonalité entre les modes pairs et/ou impairs de degrés azimuthaux distincts,

$$\begin{aligned} \langle e_l | e_{l'}' \rangle &= \delta_l^{l'} \langle e_l | e_l' \rangle \\ \langle e_l | e_l' \rangle &= v_l \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi r}{\rho^2 - \rho'^2} \left(\rho' e_l(\rho r) \frac{\partial e_l^*(\rho' r)}{\partial \rho' r} - \rho e_l^*(\rho' r) \frac{\partial e_l(\rho r)}{\partial \rho r} \right) \\ \text{avec } v_l &\begin{cases} v_l = 2 & \text{pour } l = 0 \\ v_l = 1 & \text{pour } l \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.59)$$

où e_l est une fonction cylindrique décrivant la partie purement radiale de la carte transverse dans la gaine. Nous avons vu que cette fonction s'obtient comme une combinaison linéaire de fonctions de Hankel de première et seconde espèce conjuguées l'une de l'autre, $e_l(\rho r) = e_l^+(\rho r) + e_l^-(\rho r)$ avec $e_l^{\pm}(\rho r) = A^{\pm}(\rho) H_l^{\pm}(\rho r)$. Ces deux ondes conjuguées s'interprètent comme des ondes cylindriques respectivement progressives et régressives dans le plan de la gaine¹¹. Ceci est mis en évidence par le

¹¹On obtient une interprétation analogue du rayonnement de gaine pour le guide d'onde planaire ou les cartes transverses s'obtiennent comme superposition d'ondes, non pas cylindriques mais planes.

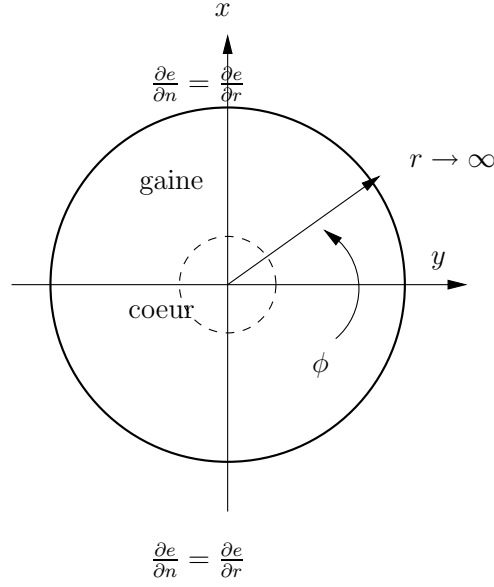


Fig. 2.20 – Contour d'intégration pour les modes du guide cylindrique.

comportement asymptotique bien connu des fonctions de Hankel ([2]),

$$e_l^\pm(\rho r) = A^\pm(\rho) H_l^\pm(\rho r) = A^\pm(\rho) \sqrt{\frac{2}{\pi \rho r}} \exp(\pm i(\rho r - \frac{\pi l}{2} + \frac{\pi}{4})) + O(\frac{1}{r})$$

$$\frac{\partial e_l^\pm(\rho r)}{\rho \partial r} = A^\pm(\rho) \frac{\partial H_l^\pm(\rho r)}{\partial r} = A^\pm(\rho) \sqrt{\frac{2}{\pi \rho r}} \exp(\pm i(\rho r - \frac{\pi l}{2} + \frac{\pi}{4})) (\pm i - \frac{1}{2\rho r}) + O(\frac{1}{r^2}). \quad (2.60)$$

Dans le but d'obtenir la normalisation des modes rayonnés dans le cas cylindrique, nous limiterons l'expansion de l'Eq. (2.59) aux termes susceptibles de former une distribution de Dirac singulière sur la différence $\rho - \rho'$. Seuls les produits scalaires entre deux ondes régressive $\langle e_l'^- | e_l^- \rangle$, ou deux ondes progressives $\langle e_l'^+ | e_l^+ \rangle$ peuvent former une telle distribution. L'équation générale, Eq. (2.59) s'applique à deux cartes radiales de modes rayonnés, dans leur ensemble. Elle s'applique à fortiori par linéarité à leurs parties, régressives ou progressives. Ainsi permet-elle de calculer les produits scalaires partiels entre deux ondes progressives, deux ondes régressives. En utilisant les développements asymptotiques déduits¹² de l'Eq. (2.60),

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi r}{\rho'^2 - \rho^2} \rho e_l^\pm(\rho' r) \frac{\partial e_l^{\pm*}(\rho r)}{\rho \partial r} = 2A^\pm(\rho') A^\mp(\rho) \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}}{\rho' + \rho} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\exp(\pm i(\rho' - \rho)r)}{\pm i(\rho' - \rho)}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi r}{\rho'^2 - \rho^2} \rho' e_l^{\pm*}(\rho r) \frac{\partial e_l^\pm(\rho' r)}{\rho' \partial r} = -2A^\mp(\rho) A^\pm(\rho') \frac{\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}{\rho' + \rho} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\exp(\pm i(\rho' - \rho)r)}{\pm i(\rho' - \rho)} \quad (2.61)$$

dans l'équation Eq. (2.59) particularisée à aux ondes progressives e_l^+

$$\langle e_l'^+ | e_l^+ \rangle = 2v_l A^+(\rho') A^-(\rho) \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} + \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}{\rho' + \rho} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\exp(+i(\rho' - \rho)r)}{+i(\rho' - \rho)} \quad (2.62)$$

¹²Nous tenons compte du fait que pour une fréquence spatiale donnée les amplitudes complexes A^+ et A^- sont conjuguées l'une de l'autre.

ou aux ondes régressives e_l^- ,

$$\langle e_l'^- | e_l^- \rangle = 2v_l A^-(\rho') A^+(\rho) \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} + \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}{\rho' + \rho} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\exp(-i(\rho' - \rho)r)}{-i(\rho' - \rho)}, \quad (2.63)$$

on obtient une somme égale à,

$$\langle e_l'^+ | e_l^+ \rangle + \langle e_l'^- | e_l^- \rangle = 4v_l |A^+(\rho') A^-(\rho)| \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} + \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}{\rho' + \rho} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin((\rho' - \rho)r + \phi_{A^+}(\rho') - \phi_{A^+}(\rho))}{(\rho' - \rho)} \quad (2.64)$$

ou ϕ_{A^+} désigne la phase de l'amplitude complexe A^+ . Contrairement au cas planaire, on ne peut mettre directement en évidence la caractère orthogonal de la solution par un distribution singulière de Dirac, à cause de la différence de phase $\phi_{A^+}(\rho') - \phi_{A^+}(\rho)$. Ceci tient au fait que les solutions développées dans le cas cylindrique et dans l'approximation scalaire de guidage faible sont des solutions approchées du problème réel, non strictement orthogonale. On doit admettre ici leur orthogonalité dans un sens mathématiquement plus faible que dans le cas planaire. Dans la mesure où nous nous intéressons, à la normalisation des modes rayonnés, nous examinerons la relation obtenue pour des fréquences spatiales voisines, dans laquelle nous pouvons négliger la différence de phase.

$$\langle e_l'^+ | e_l^+ \rangle + \langle e_l'^- | e_l^- \rangle \simeq 4v_l |A^+(\rho') A^-(\rho)| \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} + \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}{\rho' + \rho} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(\rho' - \rho)r}{(\rho' - \rho)} \quad (2.65)$$

On peut alors reconnaître l'écriture sous forme de limite d'une distribution singulière de Dirac $\pi\delta(\rho' - \rho)$,

$$\langle e_l'^+ | e_l^+ \rangle + \langle e_l'^- | e_l^- \rangle = 4\pi v_l \frac{|A^\pm(\rho)|^2}{\rho} \delta(\rho' - \rho). \quad (2.66)$$

Traduite en termes de puissances optiques transmise sur l'axe du guide cette relation d'orthonormalisation devient,

$$I = \frac{\beta}{2\mu\omega} 4\pi v_l \frac{|A^\pm(\rho)|^2}{\rho} \delta(\rho' - \rho) \delta_l^l. \quad (2.67)$$

La puissance optique transportée par un mode rayonné de la fibre optique vaut donc,

$$P = \frac{\beta}{2\mu\omega} 4\pi v_l \frac{|A^\pm|^2}{\rho'}. \quad (2.68)$$

Comme à l'accoutumée, nous normaliserons le mode rayonné de telle sorte que $P \frac{2\mu\omega}{\beta} = 1$, ce qui contraint l'amplitude d'un mode,

$$|A^\pm| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\pi v_l}} \quad \text{ou} \quad (2.69)$$

$$B = \frac{2}{\pi a} \sqrt{\frac{1}{\pi v_l}} \frac{\sqrt{\rho}}{|\sigma(J_{l+1}(\sigma a) H_l^+(\rho a) - \rho J_l(\sigma a) H_{l+1}^+(\rho a))|}.$$

après avoir utilisé la relation de continuité d'un mode donné par la relation Eq. (2.38) pour former la seconde équation. En définitive nous disposons d'une base de solutions modales orthogonales entre-elles pour décrire la propagation au sein du guide d'onde. Il est possible de choisir l'amplitude de chaque

mode de telle sorte que les relations d'orthonormalité soit décrites sous la forme générale,

$$\begin{aligned} \langle e|e' \rangle &= \delta_e^{e'} && \text{entre modes guidés} \\ \langle e|e' \rangle &= \delta(\rho - \rho') && \text{entre modes rayonnés} \\ \langle e|e' \rangle &= 0 && \text{entre modes guidés et rayonnés,} \end{aligned} \quad (2.70)$$

au sens du produit euclidien défini sur le plan transverse à l'axe du guide.

2.6 Analyse et synthèse modale

Pour le guide d'onde planaire ou la fibre optique circulaire nous disposons donc, dans l'approximation de guidage faible, d'un ensemble de modes polarisés linéairement dans le plan transverse, permettant de décrire la propagation d'une amplitude complexe monochromatiquement pure du champ électromagnétique au sein du guide d'onde. La superposition linéaire, discrète ou continue, suivant que ces modes soient guidés ou rayonnés décrit la solution générale dans le guide. Quel que soit le guide d'onde (planaire ou fibre optique), cette superposition linéaire prend la forme suivante,

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \underbrace{\sum_j c_j e_j \exp(i\beta_j z)}_{\text{spectre discret guidé (modes pairs/impairs)}} \\ & + \underbrace{\int_{\rho \in 0, k_2} c(\rho) e(\rho) \exp(i\beta(\rho)z) d\rho}_{\text{continuum rayonné (modes pairs/impairs)}}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Dans cette formule, la somme discrète ou continue doit être réalisée sur tous les modes guidés et tous les modes rayonnés de la structure guidante. Elle inclut tacitement la prise en compte des modes pairs ou impairs (parité en azimut pour les modes de la fibre optique). L'indexation employée ici pour distinguer deux modes guidés est générique. Pour la fibre optique par exemple, il faut la comprendre comme une double indexation en degrés radiaux l et azimutaux m . De plus, hormis la question de la parité, un mode rayonné de la fibre n'est pas seulement défini par sa fréquence d'oscillation transverse ρ , mais aussi par un certain degré azimutal l . La somme sur le degré azimutal, à valeur sur l'ensemble des entiers naturels, est sous-entendue.

Les modes du guide sont excités par le champ imagé à son entrée. Ce champ d'excitation sera noté ψ_{in} et s'obtient par la formule de synthèse modale précédente appliquée en $z = 0$. En vertu de la propriété d'orthonormalité des solutions modales, c.f., Eq. (2.70), les coefficients résultant de l'analyse du champ sur la base des modes, appelées amplitudes complexes couplées ou coefficients de couplage, s'obtiennent par une simple opération de projection orthogonale du type,

$$\begin{aligned} c_j &= \langle \psi(z=0) | e_j \rangle && \text{pour modes guidés} \\ c(\rho) &= \langle \psi(z=0) | e(\rho) \rangle && \text{pour les modes rayonnés.} \end{aligned} \quad (2.72)$$

La conservation isométrique, (au sens de la norme euclidienne définie sur le plan transverse du guide) du flux lumineux transporté sur l'axe optique s'exprime donc par,

$$\|\psi_{\text{in}}\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \underbrace{\sum_j |c_j|^2}_{\text{Puissance guidée}} + \underbrace{\int_{\rho \in 0, k_2} |c(\rho)|^2 d\rho}_{\text{Puissance rayonnée}}. \quad (2.73)$$

Nous supposons que le champ d'excitation est normalisé en flux, i.e, $\|\psi_{\text{in}}\|^2 = 1$ de sorte que le carré du module du coefficient de couplage $\eta_j = |c_j|^2$ ou $\eta(\rho)$ représente aussi la fraction de flux injectée sur le mode associé. Cette grandeur, qui mesure la transmission photométrique du couplage sur un mode donné est souvent appelée efficacité d'injection ou plus simplement taux de couplage.

$$\underbrace{\sum_j \eta_j}_{\text{fraction de flux guidée (pairs/impairs)}} + \underbrace{\int_{\rho \in 0, k_2} \eta(\rho) d\rho}_{\text{fraction de flux rayonnée (pairs/impairs)}} = 1 \quad (2.74)$$

Appréhendé comme une fonction de la constante de propagation axiale, le taux de couplage fournit la répartition du flux transmis par le guide sur l'espace spectral, et s'apparente donc à une densité d'énergie du signal sur cet espace. Elle peut également être interprétée du point de vue de l'optique quantique probabiliste, comme une densité de probabilité (ponctuelle ou continue) d'excitation d'un état photonique piégé dans le coeur (mode guidé), ou bien libre (mode rayonné) par le champ présent en entrée. On peut aussi la définir sur l'espace de la constante de propagation axiale par conservation de la mesure de probabilité $\eta(\rho) d\rho = S(\beta) d\beta$ comme la fonction,

$$S(\beta) = \eta\left(\rho = \sqrt{k_2^2 - \beta^2}\right) \frac{d\sqrt{k_2^2 - \beta^2}}{d\beta}. \quad (2.75)$$

Pour les modes rayonnés on peut noter que l'espace spectral est décrit par la fréquence d'oscillation transverse dans la gaine ρ et non pas par la constante de propagation axiale β . Le lien unissant les deux variables étant bi-univoque, on peut toujours effectuer le changement de variable adéquat dans la formule de synthèse modale du champ rayonné et générer numériquement ce champ rayonné dans la longueur du guide à l'aide un algorithme de Transformée de Fourier Rapide. Cette densité de probabilité permet de définir une constante de propagation axiale moyenne,

$$\bar{\beta} = \frac{\int \sqrt{k_2^2 - \beta^2} S(\beta) d\beta}{\int S(\beta) d\beta}, \quad (2.76)$$

et donc une direction angulaire de fuite caractéristique du paquet d'onde rayonné dans la gaine,

$$\bar{\theta}' = \arccos\left(\frac{\bar{\beta}}{k_2}\right). \quad (2.77)$$

L'écart-type σ_β du paquet d'onde autour de sa valeur centrale est une grandeur de première importance, dont l'inverse caractérise l'échelle de cohérence spatiale du paquet d'onde suivant l'axe. C'est paramètre de première importance directement rattaché à la dynamique d'évacuation de l'énergie rayonné dans la longueur de fibre,

$$\sigma_\beta^2 = \frac{\int (\beta - \bar{\beta})^2 S(\beta) d\beta}{\int S(\beta) d\beta}. \quad (2.78)$$

La distribution spectrale présentée ici comme une fonction de la constante de propagation axiale est en fait la dégénérescence d'une "hyper-distribution" à trois paramètres que sont la *parité* des modes, notée s , le degré azimutal noté l et la constante de distribution axiale. Cette "hyper-distribution", $\Xi(s, l, \beta)$, permet de quantifier la probabilité d'excitation des modes par rapport à ces trois observables. Elle constitue vraiment la carte d'identité du signal en termes de modes rayonnés par une fibre optique. Afin de caractériser l'injection il est également utile d'examiner comment se répartit le flux transmis, non pas sur l'espace spectral de constante de propagation axiale, mais sur tout autre

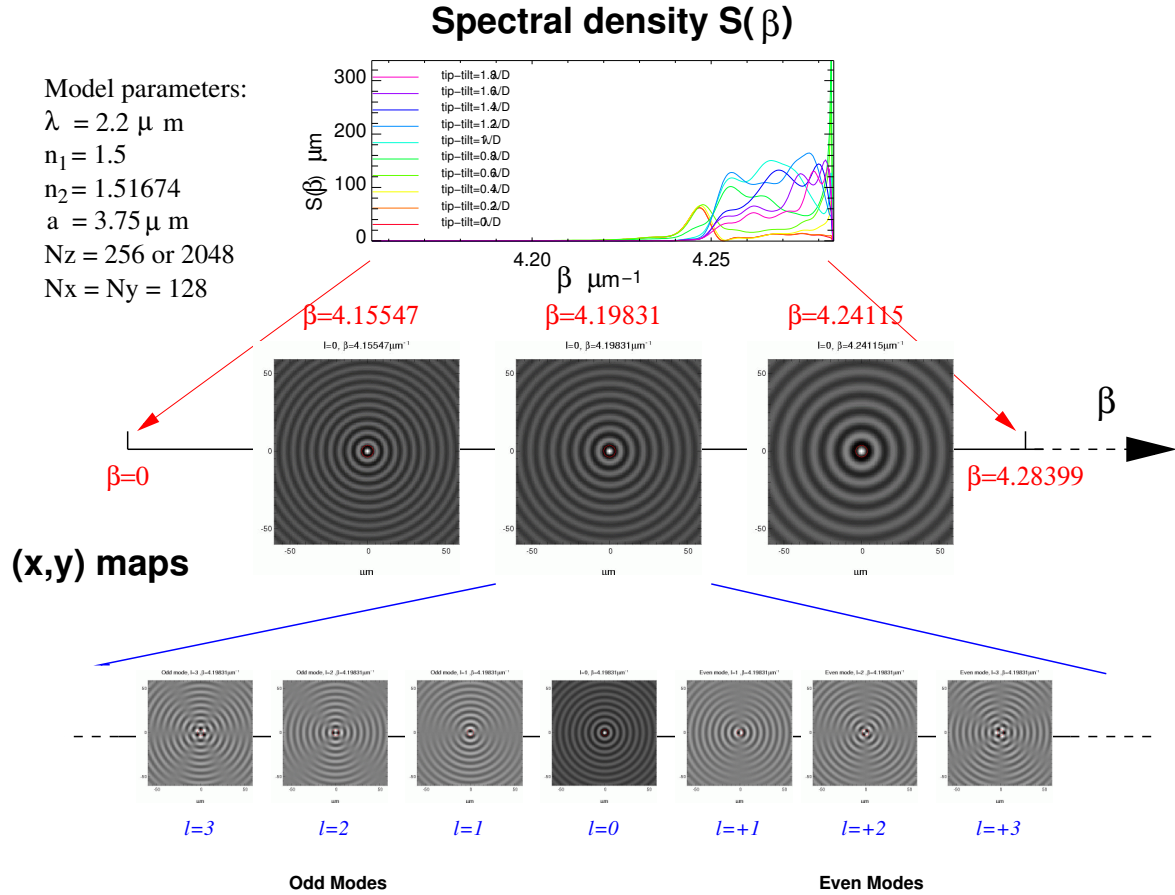


Fig. 2.21 – Continuum rayonné excité par une tâche d'airy perturbée. Figure du haut : le spectre du champ pour différentes valeurs de tilt. Figures du bas : représentation graphique des modes rayonnés correspondant respectivement à $\beta = 4.15547$, $\beta = 4.19831$ et $\beta = 4.24115$. Pour la valeur de $\beta = 4.19831$, l'ensemble des modes compris impairs et pairs pour $l = 0, 1, 2, 3$ ont été représentés.

espace de paramètre tel que la parité du mode, le degré degré azimuthal, etc..., nous illustrerons ces notions sur un exemple concret d'injection de flux pour une fibre optique monomode dans le chapitre suivant. Les trois variables étant indépendantes il suffira de sommer dans leur direction orthogonale pour obtenir leur loi de probabilité propre,

$$\begin{aligned}
 S(\beta) &= \sum_{l,s} \Xi(s, \beta, l) \\
 S(l) &= \sum_s \int \Xi(s, \beta, l) d\beta \\
 S(s) &= \sum_l \int \Xi(s, \beta, l) d\beta
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

Pour fixer les idées nous avons représenté la distribution spectrale $S(\beta)$ sur la figure Fig. 2.6 illustrant le principe de l'analyse modale d'un champ en termes de modes rayonnés, pour une fibre monomode fonctionnant à deux microns. La figure illustre aussi l'influence d'un erreur de tip-tilt sur la distribution.

L'influence de l'aberration introduite (ici le tip-tilt) se manifeste par une augmentation de l'aire sous la distribution spectrale des modes rayonnés (moment d'ordre nul), décrivant une perte de flux guidé (modification de l'équilibre 80% – 20% obtenue dans le cas idéal), et par une modification de ses moments d'ordre supérieurs (barycentre et dispersion) traduisant un déplacement de la distribution aux basses fréquences spatiales et étalement de la fonction de distribution autour de sa moyenne (perte de cohérence spatial dans l'axe). Nous avons la confirmation sur cet exemple d'injection que la densité spectrale de puissance des modes rayonnés *est l'outil adéquat* pour décrire la sensibilité du flux non filtré par le guide, aux contraintes extérieures (et aux aberrations pupillaires en particulier).

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre j'ai souhaité collecter et compléter tous les éléments théoriques indispensables au développement d'un simulateur de filtrage uni-modal (ou éventuellement multi-modal !) par fibre optique, en lumière non polarisée, réaliste du point de vue de la propagation du champ électromagnétique et dépassant, dans le cadre monomode, le simple modèle de propagation gaussienne couramment adopté sur le mode fondamental du guide.

La raison principale à l'origine d'une telle démarche est sans doute le contexte instrumental lui-même. En effet, le choix de la fibre optique circulaire monomode comme élément clé permettant de réaliser le filtrage modal dans les interféromètres de nouvelle génération (VINCI, AMBER, OHANA) s'impose assez nettement en interférométrie astronomique, pour les raisons déjà évoquées dans l'introduction générale (flexibilité offerte par dans le transport des faisceaux à recombinaison, réjection des aberrations atmosphériques, nulling). Elle intervient aussi au niveau de l'injection de flux dans des composants d'optique intégrée tels que les jonctions Y, les recombineurs multi-télescopes, les tricoupleurs,...etc, Haguenaer et al. [41], faisant d'elle le véritable acteur du filtrage modal.

Paradoxalement, la physique même du filtrage modal est mal cernée par la communauté astronomique. Cet état de fait est indubitablement lié au caractère non exhaustif de la littérature technique portant sur le sujet, qui s'arrête bien souvent à la description des modes guidés dans le coeur du guide mais ne traite pas du problème de l'évacuation de l'énergie lumineuse non filtrée, dans la gaine par les modes rayonnés de la fibre. Au mieux, l'existence de cette classe de solutions modales est-elle mentionnée, Gatak [35].

Pour ce faire, un effort particulier a été réalisé au chapitre théorique des modes rayonnés par un guide d'onde optique, et en particulier du calcul explicite de leur normalisation. J'ai développé une méthode de portée assez générale applicable tant aux solutions du guide planaire que de celles de la fibre optique circulaire. L'idée générale physique sur laquelle repose cette méthode est qu'il suffit de connaître le comportement asymptotique des modes dans la gaine pour évaluer la puissance lumineuse qu'ils transportent. A l'infini, ces derniers sont construits comme une superposition d'ondes stationnaires progressives régressives dans le plan transverse du guide, planes dans le cas du guide planaire, cylindriques dans le cas de la fibre optique circulaire.

L'analyse des modes rayonnés a été menée dans l'approximation scalaire de guidage faible. Néanmoins la méthode de normalisation des modes que j'ai développée est générale et reste applicable dans le cas d'un guidage quelconque (Pierre Benech, communication personnelle). Elle permet d'entrevoir la possibilité d'une description de l'onde propagée en termes de polarisation, ne souffrant d'aucune approximation. En outre, le modèle développé ici correspond à une gaine semi-infinie. Nous supposons implicitement qu'une fois l'énergie lumineuse est évacuée, elle est absorbée et ne revient pas dans le

coeur par réflexion sur la surface externe de la gaine. On peut aussi envisager dans un avenir proche une extension à N couches diélectriques de dimensions finies pour prendre en compte les réflexions de l'onde sur la surface externe d'une gaine de taille finie. Trois couches concentriques suffisent pour décrire le phénomène. D'autres modes guidés vont pouvoir être excités dans le substrat (couche intermédiaire). Dans l'approximation scalaire l'onde, il faudra résoudre un système de 2 équations aux valeurs propres pour déterminer tous les modes guidés. La normalisation des modes rayonnés pourra être effectuée d'une manière analogue dans le superstrat (couche externe semi-infinie). L'analyse modale présentée ici est très proche des techniques de simulations de propagation de type RSM (Radiation Spectral Method). C'est juste une RSM un peu particulière ou la détermination des cartes modales est faite analytiquement et non par résolution numérique.

Je pense qu'il serait également extrêmement enrichissant d'intégrer cette fonction améliorée de filtrage optique dans un simulateur "deuxième génération" d'AMBER (avec possibilité de "shuntage" du calcul des modes rayonnés, si selon le contexte observationnel, son besoin ne se fait pas ressentir) la version initiale développée par Gilles Duvert, ne tient compte que du couplage sur le mode fondamental gaussien), après optimisation du code source¹³. Une mise plus "professionnelle" du code ouvre de belles perspectives quant à l'étude théorique de l'évolution d'un spectre des modes rayonnés dans une loi de turbulence atmosphérique couplée à l'optique adaptative. C'est un problème théorique en soi, dont la résolution peut aboutir à un logiciel permettant le dimensionnement optimisé du point de vue de la réjection des modes rayonnés par une fibre optique destinée à l'observation astronomique au sol. Les applications développées au chapitre suivant donnent déjà un aperçu de la capacité du modèle bi-couche à décrire le filtrage modal d'aberrations statiques.

¹³Je n'utilise pas la FFT rapide pour la synthèse modale dans l'axe de la fibre et le code source que j'ai mis au point n'est sans aucun doute pas un modèle du genre, en matière d'optimisation des performances et de l'occupation mémoire

Chapitre 3

Taux de réjection

Sommaire

3.1	Qualité du filtrage modal	65
3.2	Les entrées du modèle	66
3.2.1	Guidage optique monomode	66
3.2.2	Echantillonnage du Continuum	68
3.2.3	Optimisation du couplage monomode	69
3.3	Les sorties du modèle	74
3.3.1	Distribution spectrale	74
3.3.2	Carte d'Intensité	76
3.4	Décomposition des phénomènes	77
3.5	Le flux mesuré	79
3.6	Le taux de réjection	81
3.7	Aberrations statiques	87
3.7.1	Représentation modale	87
3.7.2	Tip-Tilt et Defocus	89
3.7.3	Densités spectrales	89
3.7.4	Chartes de réjection	90
3.8	Conclusion	90

3.1 Qualité du filtrage modal

Il existe un contexte observationnel qui exige une grande précision instrumentale. C'est celui de la coronagraphie interférentielle, dont on sait, de part les objectifs astrophysiques poursuivis extrêmement ambitieux, qu'elle va nécessiter la formation de franges à *très haut contraste*. Cette technique instrumentale est mise en oeuvre dans la mission IRSI-DARWIN, (Ollivier et al. [75]). La mission spatiale a pour but de détecter des planètes extra-solaires telluriques, et par une analyse spectroscopique de leur rayonnement, de trouver éventuellement des conditions de vie similaire à la nôtre. Les enjeux astrophysiques et philosophiques de la mission sont formidablement rapportés dans la thèse de Marc Ollivier [74]. Pour ce faire il faut toutefois pouvoir isoler le rayonnement de la planète. La méthode de coronagraphie interférentielle a été retenue. Elle repose sur une idée de Bracewell formulée en 1979. Cette dernière est de recombinaison interférométriquement la lumière provenant de étoile

et de son exoplanète. L'interféromètre pointe l'étoile et la différence de marche entre les deux voies interférométriques sont déphasées de π . Les interférences sont destructives pour l'étoile. Pour l'exoplanète séparée angulairement de l'angle θ par rapport à l'étoile, la différence de marche géométrique est de $B_{12} \sin \theta$ ou B_{12} est la base l'interféromètre. La longueur de base peut être réglée de manière à compenser exactement le déphasage de π , auquel cas la lumière en provenance de la planète interfère constructivement. Sur le plan de la détection, le signal de l'étoile est éteint, seul subsiste celui de sa compagne. Le taux de réjection de l'interféromètre coronagraphique est défini comme le rapport entre le maximum et le minimum des intensités de l'interférogramme $\rho = I_{max}/I_{min}$. Ce taux permet de comparer les performances de réjection du signal stellaire par le système au contraste de flux existant réellement entre l'étoile et sa planète voisine. Le taux de réjection coronagraphique doit être très élevé, de l'ordre de grandeur du contraste réel. Dans l'infrarouge thermique [$5\mu\text{m} - 18\mu\text{m}$], là où le contraste entre le flux de l'étoile et la planète est le plus plus favorable, la profondeur de nulling (l'inverse du taux de réjection) doit quand même être de l'ordre de 10^{-6} . Les participants au projet d'interférométrie spatiale de la NASA, SIM (Space Interferometer Mission), pendant américain de DARWIN, font état de profondeurs de nulling expérimentales stabilisées atteintes à un niveau de 10^{-4} Seyrabin [97]. Ces profondeurs de nulling élevées requièrent un contrôle drastique de la différence de chemin optique (précision nanométrique), de la dispersion chromatique (précision subnanométrique de l'opd), de légalisation des flux dans chaque voie (0.1%), de la polarisation différentielle (rotation des polarisations confinée au dixième de degré) et des erreurs de front d'onde. On pourra consulter la thèse de Haguenauer et al. [41] pour plus d'informations quantitatives à ce sujet et surtout comment l'optique guidée apporte une solution intéressante à cette problématique d'interférométrie à haut contraste. Même si à l'heure actuelle, on ne dispose pas encore de guides d'onde aptes à opérer dans l'infrarouge thermique, Le LAOG a porté son effort de recherche dans le développement de guides d'onde à $10\mu\text{m}$, Laurent et al. [54], Laurent et al. [55].

Un taux de réjection coronagraphique de l'ordre de $\rho = \frac{I_{max}}{I_{min}} = 10^6$ requiert un contraste maîtrisé au niveau de $V \simeq 1 - \frac{2}{\rho} = 99.9998$ ce qui implique des optiques ayant une qualité de surface égale à $\lambda/3000$, ce qui est pratiquement irréalisable. L'emploi d'un filtrage spatial ou modal des aberrations de phase, proposé par Mariotti, en mars 1995 permet de relaxer ces contraintes. Les pupilles à recombinaison sont idéalement filtrées, le front d'onde de sortie du guide monomode étant parfaitement plan. Seul un piston différentiel statique entre les deux voies doit être annulé par une ligne à retard. L'hypothèse sous-jacente à l'emploi d'un filtrage optique monomode des faisceaux est que le système double n'est pas résolu à l'échelle spatiale d'une pupille individuelle du coronographe interférentiel : toute l'information photonique stellaire et planétaire est concentrée dans le lobe d'antenne du guide. L'autre hypothèse évidemment concerne la propriété de filtrage modal elle-même, à savoir l'aptitude du guide à convertir les aberrations en intensité lumineuse guidée sur une mode de propagation unique.

Nous savons désormais que cette hypothèse est une hypothèse d'école, une situation idéale. En réalité l'énergie non filtrée monomode est diffractée dans la structure guidante, sur la base continue des modes rayonnés du guide. A une longueur de guide donnée on peut s'attendre à ce qu'une certaine fraction résiduelle du flux rayonné vienne polluer le signal guidé sur le mode fondamental du guide.

Dès lors que se passe-t-il si l'on tient compte, ce qui doit être fait, de la contribution rayonnée par le guide d'onde, en interférométrie coronagraphique ? On peut raisonnablement supposer que le flux rayonné ne participe pas à la construction du signal des franges mais vient s'ajouter de manière incohérente au continu de l'interférogramme, réduisant la profondeur de nulling de l'interféromètre coronagraphique. Une contrainte formulée dans le cadre d'une pré-étude pour l'interféromètre DARWIN

stipule un taux de réjection photométrique des modes rayonnés de l'ordre de 10^{-7} , soit un facteur 10 en dessous de la profondeur de nulling coronographique désirée.

La théorie développée au chapitre précédent, prenant en compte la propagation complète du champ dans le guide permet de formuler la qualité optique du filtrage monomode, au sens d'un taux de réjection photométrique des modes rayonnés. Je procède à l'injection lumière sur une fibre monomode. Le calcul est tout d'abord mené pour une tâche d'Airy idéale. Cette première injection complète en termes de modes, permet de mettre en évidence les grandeurs de première importance qui interviennent dans la physique de la réjection des modes rayonnés dans la gaine. L'évolution du taux de réjection dans la longueur du guide est exprimée. L'injection est ensuite perturbée, des aberrations primaires telles que le *tip-tilt* et le *defocus* sont introduites et j'en tire les premières conclusions concernant la physique du filtrage spatial, en présence d'aberrations statiques.

3.2 Les entrées du modèle

3.2.1 Guidage optique monomode

J'ai choisi de simuler le cas d'une fibre arbitraire dont les caractéristiques opto-géométriques produisent un paramètre de guidage V normalisé dimensionné à la limite supérieure $V = 2.40482$ de la plage de monomodicité pour la longueur d'onde centrale du rayonnement $2.2 \mu\text{m}$ de la bande K. (En réalité, la longueur d'onde de monomodicité est dimensionnée en amont de la bande spectrale astronomique concernée.). L'ouverture numérique ON d'une fibre

$$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad (3.1)$$

et elle revêt une interprétation simple en termes d'optique géométrique : c'est le sinus de l'angle maximum que peut faire un rayon lumineux venant de l'espace libre avec l'axe optique de la fibre pour être guidé par cette dernière. Au delà de cet angle, les rayons réfractés dans le coeur du guide vont excéder l'angle critique de réflexion totale. Le paramètre de guidage est donc relié à l'ouverture numérique par la relation,

$$V = k a ON \quad (3.2)$$

La spécification de l'ouverture numérique est insuffisante pour contraindre le paramètre de guidage normalisé du guide V , qui nous l'avons vu détermine pourtant toute la physique du guidage (nombre de modes guidés, constante de propagation sur l'axe, confinement des modes, etc...)!. J'ai imposé un rayon de coeur de $a = 3.75 \mu\text{m}$ et une ouverture numérique $ON = 0.22$ et un indice de réfraction de gaine de 1.5 (verre). A titre d'indication, les fibres d'AMBER utilisent typiquement un coeur deux fois plus gros $a = 6 \mu\text{m}$ et une ouverture numérique deux fois plus faible $ON = 0.125$. Ces différences ne sont pas essentielles, ce qui est recherché ici c'est la prescription d'un paramètre de guidage normalisé V visant une condition d'opération monomode en termes de modes guidés à la longueur d'onde considérée.

Connaissant V le modèle détermine le nombre de modes guidés (ici un seul) et pour chacun constante de propagation axiale, évanescence de gaine γa , fréquence d'oscillation de coeur κa en résolvant les équations aux valeurs propres du guide par bisection à une précision numérique donnée (10^{-6}). La spécification d'un champ de vue (64 rayons de coeur) et d'un échantillonnage numérique (2 pixels/rayon de coeur) transverses lui permet de procéder au calcul des cartes modales normalisées en flux.

Tab. 3.1 – Paramètres opto-géométriques de la fibre.

a	$3.75\mu\text{m}$
λ	$2.2\ \mu\text{m}$
n_{core}	1.51674
n_{cladding}	1.5
$\Delta n/n$	1.1%
V	2.4048

Nous sommes au loin de la valeur de coupure du mode fondamental ($V=0$). Au loin de sa fréquence de coupure Marcuse a montré (Marcuse [60]) que la carte transverse du mode fondamental pouvait être assimilée à une Gaussienne de rayon équivalent w_o , communément appelée “waist”,

$$e_{01}(\mathbf{r}) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi w_o^2}} \exp - \frac{r^2}{w_o^2} \quad t.q. \|e_{01}\| = 1 \quad (3.3)$$

La distribution est normalisée au sens de la norme euclidienne. Il calcule l’approximation gaussienne équivalente en minimisant le taux de couplage, i.e. le produit scalaire, entre le profil de champ réel et cette même approximation, et fournit une loi de variation du rayon en fonction du paramètre de guidage,

$$\frac{w_o}{a} = 0.65 + \frac{1.619}{V^{\frac{3}{2}}} + \frac{2.879}{V^6} \quad \text{pour } 0.8 < V < 2.5 \quad (3.4)$$

Il est important de constater qu’ayant choisi de dimensionner notre fibre exactement à la coupure monomode $V = 2.4048$ pour sa longueur d’onde de travail, je me place ici dans le cadre d’un guidage monomode à confinement maximal. Dans la suite, j’adopterai l’approximation gaussienne du mode fondamental pour raisonner sur les calculs d’injection monomode. Par essence, cette approximation gaussienne est d’autant meilleure que l’on se rapproche de la longueur d’onde de coupure monomode du guide.

3.2.2 Echantillonnage du Continuum

En pratique le calcul des modes rayonnés requiert une discrétisation du continuum spectral en constante de propagation axiale β . Nous avons choisi un nombre arbitraire $N_\beta = 256$ de modes rayonnés qui devraient être à priori distribués sur l’intervalle spectral $[0, k_2]$. Je me suis réservé le droit d’introduire un seuillage positif aux valeurs inférieures de l’intervalle. En effet le choix d’un intervalle spectral plus réduit est en fait *directement lié aux conditions d’injection*. J’ai pu constater numériquement que le couplage optimisé d’une tâche d’Airy idéale sur le mode fondamental de la fibre n’excite pas de modes dont les constantes de propagations axiales sont inférieures à $\beta_{\min} = 0.97k_2$. Autrement dit, pour ce type d’injection les modes rayonnés de la fibre diffractent dans un cône angulaire bien délimité en valeur supérieure. L’avantage de réduire l’intervalle spectral, est d’une part d’éviter de stocker des zéros inutilement dans le processus de synthèse modale, et d’autre part de disposer d’une résolution plus fine sur l’espace spectral, donc un champ de vue reconstruit plus étendu dans la longueur de la fibre. En se limitant à l’intervalle spectral $[0.97k_2, k_2]$ la longueur de fibre est alors échantillonnée sur N_β points compris dans l’intervalle $[0, 6257]\ \mu\text{m}$.

Outre la constante de propagation axiale, il faut aussi caractériser les cartes de modes rayonnés par leur degré azimutal. J’ai choisi de représenter les cartes sur au plus 10 ordres azimutaux. Cependant

pour la tâche d’Airy idéale, celle-ci étant centro-symétrique, j’ai forcé l’analyse modale au spectre des modes d’ordre azimutaux nuls $l = 0$, puisque théoriquement elle ne doit exciter que cette famille de modes c.f Fig.3.2.2.

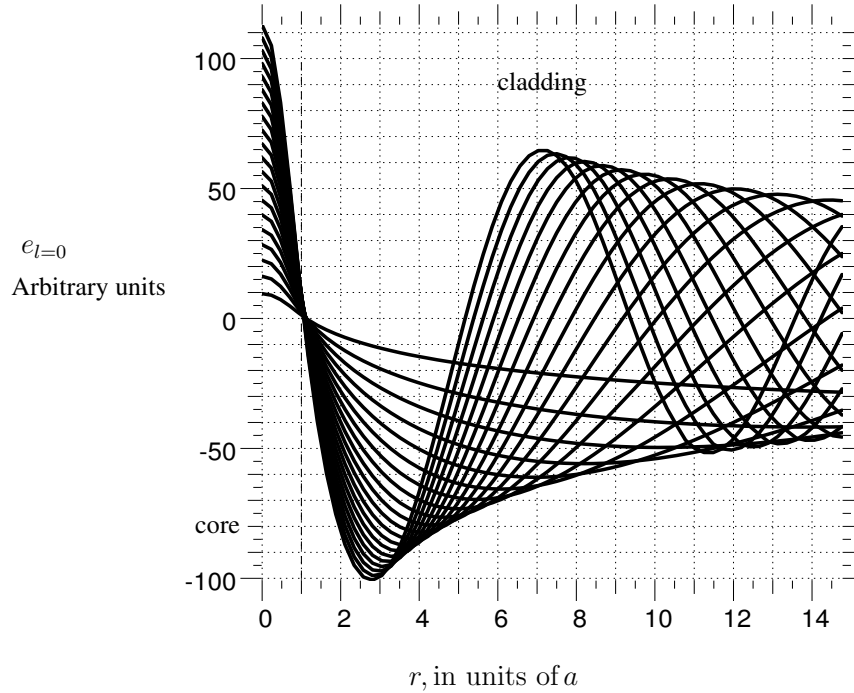


Fig. 3.1 – Carte radiale des modes rayonnés d’ordre azimutal nul $l = 0$ pour les 20 premières fréquences d’oscillation transverse ρ .

Il convient de nuancer ce propos. En forçant l’analyse à un seul ordre azimutal je dois m’assurer que la carte d’excitation est bien centro-symétrique d’un point de vue numérique. C’est pourquoi il faut avoir un champ de vue transverse important par rapport à la dimension caractéristique de la tâche d’Airy (typiquement une région de coeur, voir section suivante). Avec un champ de vue trop limité, on risque de briser, par effet de troncature, la symétrie de révolution du problème autour de l’axe de la fibre : des modes d’ordres azimutaux supérieurs peuvent être excités de manière factice. J’ai pu me rendre compte, aux cours de mes expériences numériques, de l’apparition ce genre d’artéfact, en laissant libre le nombre de degrés azimutaux et en réduisant le champ de vue¹.

Nous disposons de tous les éléments pour calculer les cartes modales des modes rayonnés et pratiquer les formules d’analyse et de synthèse modale dans la longueur de la fibre. A présent je vais dimensionner la tâche d’Airy relativement au mode fondamental du guide.

3.2.3 Optimisation du couplage monomode

Du point de vue de la source j’ai injecté une tâche d’Airy idéale. Le calcul de l’injection d’une tâche d’Airy monochromatique imagée au foyer d’un télescope individuel sur le mode fondamental gaussien d’une fibre optique a été caractérisée par plusieurs auteurs Shaklan & Roddier [93], Coudé du Foresto [20]. Une vision simplifiée et schématique du guidage optique monomode a été exploitée par

¹Il est également important de disposer d’un champ de vue surdimensionné par rapport à la région de coeur car ce sont précisément les ailes de la tâche d’Airy qui excitent les modes rayonnés.

pour mener les premières simulations numériques d'injection lumineuse dans un guide d'onde dédié à l'observation astronomique [93]. De cette étude, il ressort qu'au mieux 80% des photons issus d'une source ponctuelle peuvent être couplés sur le mode fondamental d'un guide monomode, traduisant l'inadéquation basique entre le profil du champ électromagnétique associé à une tâche d'Airy et le profil du mode fondamental. Ils montrent que les aberrations pupillaires dégradent le taux de couplage, et qu'une correction adaptative aux bas ordres (correction du tip-tilt notamment) est indispensable pour le maintien du taux de couplage. Le couplage d'une source ponctuelle en conditions de correction partielle de la phase turbulente par optique adaptative a été faite par Ruillier [85]. En laboratoire, pour améliorer le couplage électromagnétique d'une fibre optique sur la tâche d'Airy, j'ai entendu que certains auteurs préconisent le recours à un masque de phase sur le plan d'entrée de la fibre, je ne dispose pas de références bibliographiques précises sur ce sujet, mais je livre quelques précisions quantitatives dans les paragraphes à venir.

A ce stade de la discussion, il faut retenir que le taux de couplage, qui dépend essentiellement des extensions spatiales relatives du champ d'excitation et du mode fondamental, *admet un optimum*. On peut obtenir une formule analytique du taux couplage sur le mode fondamental gaussien, en transposant les formules générales du couplage du plan image au plan de la pupille d'entrée du télescope. La conjugaison optique entre ces deux plans d'analyse pouvant être décrite par une transformation de Fourier isométrique, c.a.d. conservative au sens de la norme euclidienne, on a une invariance formelle des expressions de l'amplitude couplée et du taux de couplage associé sur le plan pupille,

$$\begin{aligned} c_{01} &= \langle \widetilde{e}_{\text{in}} | \widetilde{e}_{01} \rangle \\ \eta_{01} &= |c_{01}|^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $\widetilde{e}_{\text{in}}$ (resp. \widetilde{e}_{01}) désigne la transformée de Fourier de ψ_{in} (resp. e_{01}). La carte transverse du mode fondamental sur le plan pupille reste dans l'approximation gaussienne, une distribution gaussienne normalisée,

$$\widetilde{e}_{01}(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{\frac{2}{\pi \widetilde{w}_o^2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{\widetilde{w}_o^2}\right) \quad t.q. \|\widetilde{e}_{01}\| = 1 \quad (3.6)$$

où \widetilde{w}_o (resp. $(2\widetilde{w}_o)$) désigne le rayon (resp. le diamètre) du mode fondamental sur le plan pupille du télescope. Physiquement, cette carte transverse est obtenue en éclairant en retour inverse la pupille d'entrée par le faisceau gaussien sortant du guide. L'étude de la propagation de faisceaux gaussiens dans l'espace libre a été développée conjointement à l'apparition des sources monomodes LASER. C'est elle qui permet de caractériser la géométrie du mode fondamental sur divers plans paraxiaux au chemin optique. La carte transverse du mode fondamental sur le plan pupille est la distribution spatiale de "champ lointain"² associée au mode fondamental. Les effets de la diffraction font que le rayon du mode fondamental augmente asymptotiquement de façon linéaire avec le chemin optique. Si F désigne la distance focale équivalente du système optique destiné à l'injection de lumière dans le guide, on a simplement

$$\widetilde{w}_o = F \theta_o, \quad (3.7)$$

ou θ_o représente le demi-angle au sommet du cône de diffraction caractéristique du faisceau. Cet angle se calcule en fonction du rayon du mode fondamental w_o rapporté à la profondeur de la zone de Rayleigh du faisceau gaussien z_o ,

$$\theta_o = \frac{w_o}{z_o} = \frac{2}{k w_o} \quad (3.8)$$

²i.e., le champ diffracté à grande distance de la zone de Rayleigh caractéristique du faisceau gaussien sortant du guide.

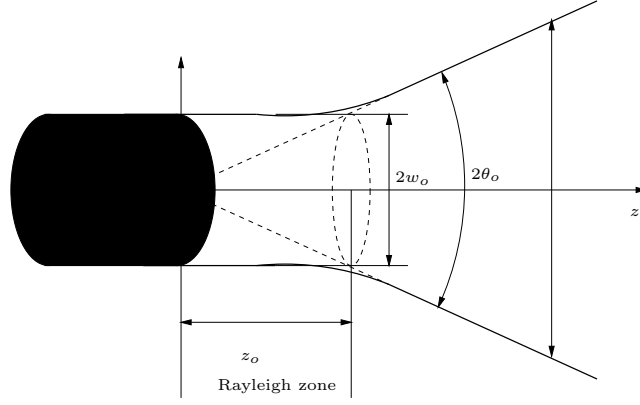


Fig. 3.2 – Caractéristiques géométriques principales du faisceau Gaussien sortant d’une fibre optique mono-mode.

On peut voir la zone de Rayleigh comme la distance caractéristique suivant laquelle les effets de la diffraction angulaire restent négligeables et sur laquelle le faisceau reste collimaté au diamètre du mode fondamental $2w_o$. Typiquement cette distance n’est que de quelques dizaines de microns pour les fibres optiques considérées. Les photons piégés dans le coeur du guide explorent très rapidement toutes les directions du demi-espace libre! Elle se calcule à une longueur d’onde donnée suivant la formule,

$$z_o = \frac{kw_o^2}{2} \quad (3.9)$$

Les paramètres géométriques caractéristiques d’un faisceau gaussien sont représentés sur la figure Fig.3.2.3. En utilisant l’approximation gaussienne du mode fondamental et la formule du couplage exprimée sur le plan de la pupille d’entrée du système optique d’injection, avec comme source d’excitation le champ normalisé correspondant à une pupille circulaire P de diamètre externe D , et de surface collectrice S , éventuellement obscurée centralement de rapport linéaire, $\gamma_{\text{obs}} = \frac{d}{D}$ le rapport linéaire de l’obscuration centrale,

$$e_{\text{in}}(\rho) = P(\rho) \quad (3.10)$$

avec,

$$P(\rho) = \Pi\left(\frac{2\rho}{D}\right) - \Pi\left(\frac{2\rho}{d}\right) \quad \text{avec,} \quad S = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \gamma_{\text{obs}}^2) \quad (3.11)$$

ou Π désigne la fonction indicatrice du disque de rayon unitaire, on peut obtenir une formule analytique du taux de couplage sur le mode fondamental,

$$\eta_{01} = \frac{2[\exp(-\gamma_{\text{obs}}^2 \gamma_{\text{mod}}^2) - \exp(-\gamma_{\text{mod}}^2)]^2}{\gamma_{\text{mod}}^2(1 - \gamma_{\text{obs}}^2)} \quad (3.12)$$

ou nous avons introduit γ_{mod} le rapport linéaire entre le diamètre de la pupille d’entrée et le diamètre du mode fondamental diffracté sur le plan pupille,

$$\gamma_{\text{mod}} = \frac{D}{2w_o} = \frac{m_o}{F/D} \quad (3.13)$$

Comme l’indique la deuxième égalité dans l’équation précédente cette grandeur adimensionnée mesure le rapport entre l’ouverture numérique du faisceau gaussien définie par $m_o = \frac{1}{2\theta_o}$ –à ne pas confondre avec l’ouverture numérique du guide d’onde ON –et l’ouverture numérique du système d’injection $\frac{F}{D}$.

C'est aussi au facteur $\frac{\pi}{2}$ près, le rapport entre le rayon angulaire caractéristique $\frac{w_o}{F}$ du spot gaussien et celui de la tâche d'Airy $\frac{\lambda}{D}$ sur le plan plan-image. En diminuant l'ouverture numérique du système d'injection on augmente le rapport γ_{mod} et l'on concentre moins la tâche d'airy sous le spot gaussien.

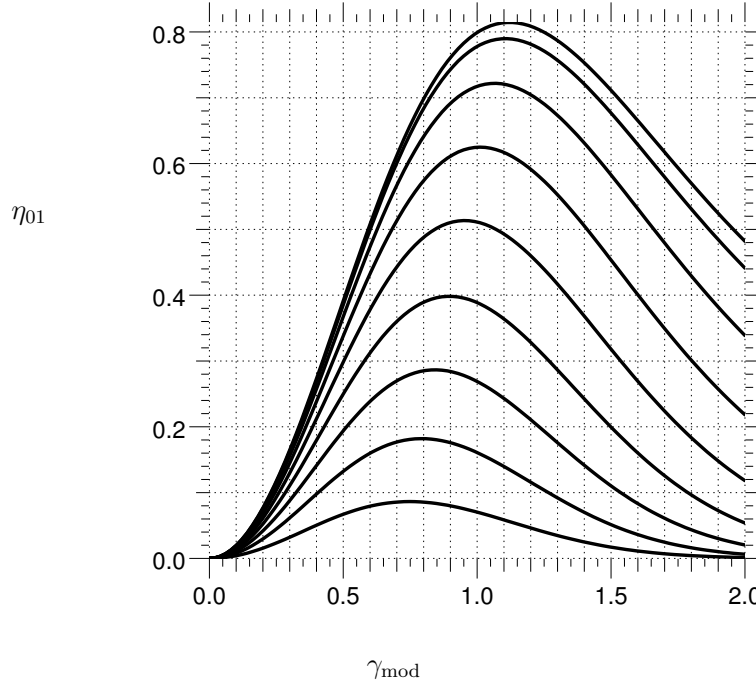


Fig. 3.3 – Taux de couplage d'une tâche d'Airy idéale, pour des rapports d'obscurité γ_{obs} variant de 0 à 0.9 par pas de 0.1.

Le taux de couplage théorique d'une tâche d'Airy idéale sur le mode fondamental gaussien d'une fibre monomode est illustré sur la figure Fig. 3.2.3. Il admet un optimum, *typiquement 81% sans obscuration centrale* situé à la valeur $\gamma_{\text{mod}} = 1.11$ sans obscuration centrale, et il est possible de jouer sur l'ouverture numérique $\frac{F}{D}$ du système d'injection pour atteindre cette valeur optimale. La forme générale des courbes représentées sur la Fig. 3.2.3 s'interprète qualitativement plus facilement sur le plan d'entrée du guide que sur le plan pupille du système optique d'injection, en termes d'extensions spatiales relatives entre le champ d'excitation et le mode fondamental.

Ce maximum n'est pas obtenu de manière asymptotique avec des valeurs de plus en plus réduites de l'ouverture numérique $\frac{F}{D}$ du système d'injection (i.e. en concentrant toute la tâche d'airy sous le spot gaussien). Ceci s'explique par le fait que le taux de couplage est obtenu comme le carré d'une projection scalaire entre *les amplitudes* des champs électriques et non entre leur intensité quadratique. Aussi l'intégrale de recouvrement des deux champs est-elle largement sensible aux nombre d'alternances négatives du champ électromagnétique associé à la tâche d'Airy présentes sous la carte transverse gaussienne du mode fondamental. A la limite des petites ouvertures numériques, ce nombre d'alternances est important et la portion du lobe principal positif de la tâche d'Airy interceptée par le mode gaussien étant réduite le recouvrement des deux champs électriques chute. En augmentant l'ouverture numérique, le couplage augmente jusqu'à un maximum théorique obtenu pour une valeur optimale voisine de l'unité du rapport γ_{mod} , c'est à dire dès lors que le lobe principal de la tâche d'Airy "remplit" exactement le spot gaussien $\frac{w_o}{F}$ et que la première alternance négative se voit rejetée à l'extérieur du spot gaussien. Lorsque l'on persiste à augmenter l'ouverture numérique du système

d'injection, toutes les alternances négatives de la tâche d'Airy sont rejetées à l'extérieur de la largeur caractéristique du spot gaussien. La chute du taux de couplage observée est cette fois imputable, à l'atténuation de l'amplitude du lobe principal sous le spot gaussien inhérente aux effets conjoints de la dilution spatiale de la tâche d'Airy et de la nécessité de conserver la puissance optique totale imagée sur la tête du guide ($\|e_{in}\|^2 = S$). Les profils de champ correspondant à ces trois situations schématisées sont illustrées sur la figure Fig.3.2.3, pour le cas non obstrué. La présence d'une obscuration centrale

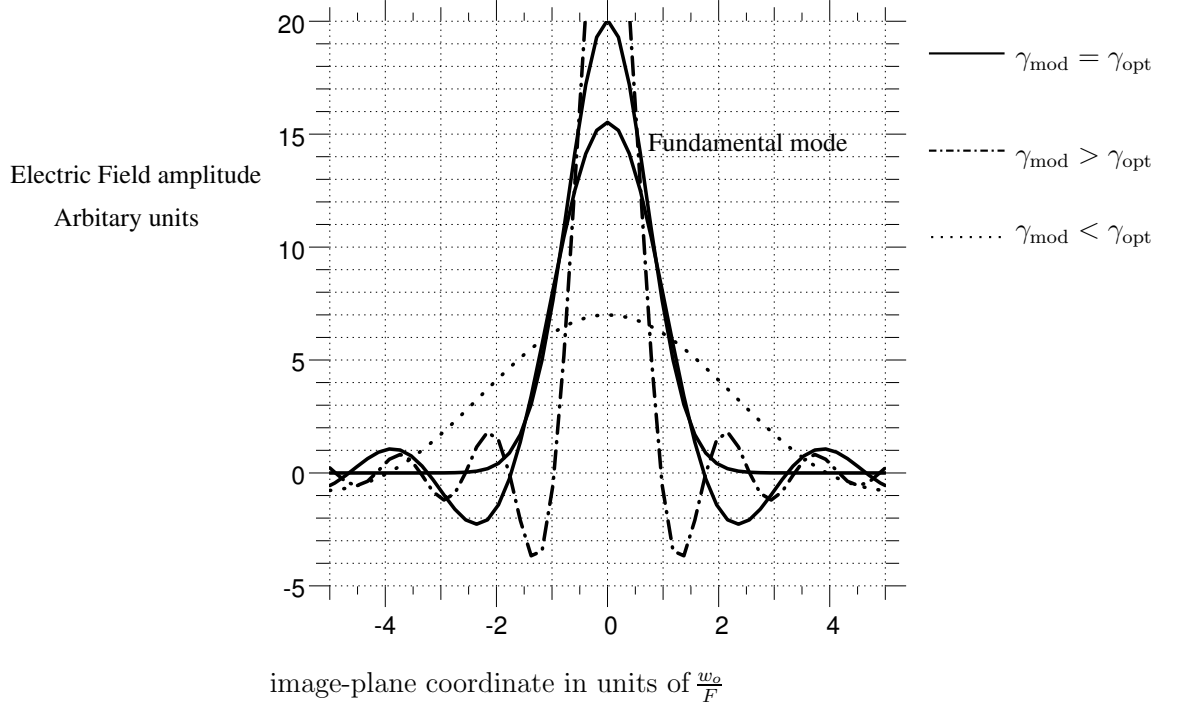


Fig. 3.4 – Profil du champ d'excitation comparé à celui du mode fondamental sur le plan image, de part et d'autre ainsi qu'à l'optimum du taux de couplage pour une tâche d'Airy non obstruée.

fait chuter le taux d'injection maximal théoriquement admissible et requiert l'emploi d'une ouverture numérique plus importante pour le système d'injection (déplacement du maximum vers les faibles valeurs du rapport γ_{mod}). Le déplacement du maximum théorique vers les grandes ouvertures numériques observé en présence d'une obscuration centrale est principalement dû à la diminution de la largeur du lobe principal par rapport au cas non obstrué. D'un point de vue technologique, les ouvertures numériques requises pour l'optimisation du taux de couplage sont faibles et difficilement accessibles par des systèmes optiques classiques (lentilles). Une solution consiste à pratiquer l'injection de flux avec des paraboles hors-axe Coudé du Foresto [20], Haguenauer et al. [41]. Si le système optique fibré est destiné à travailler à fort flux une autre solution peut consister à relaxer la contrainte sur l'ouverture numérique en introduisant une obscuration centrale, en acceptant du même coup une perte consciente et mesurée du taux de couplage et de la puissance optique injectée à l'entrée. D'une manière générale on peut voir le taux de couplage comme une mesure de la colinéarité entre le vecteur "champ d'excitation" et le vecteur "mode fondamental", au sens d'une analyse vectorielle induite par la norme euclidienne. Les vecteurs étant supposés normalisés à l'unité, le taux de couplage mesure le cosinus carré de l'angle entre ces deux vecteurs. L'inégalité de Cauchy-Schwartz prédit une valeur du taux de couplage toujours inférieure à l'unité, valeur maximale obtenue seulement en cas de colinéarité. La

désadéquation entre le profil de champ associé à une tache d’Airy et le profil gaussien limite la valeur optimale du taux de couplage à 81%. Le seul moyen d’outrepasser cette limite c’est d’affiner la ressemblance fonctionnelle entre le profil spatial du champ imagé et celui du mode fondamental du guide. Dans ce contexte, une méthode consisterait à introduire un masque de phase sur le plan d’entrée du guide de manière à redresser les alternances négatives de la tâche d’Airy. Cette méthode qui agit sur le signe de la tâche d’Airy n’induit théoriquement aucune perte du flux total injecté à l’entrée. J’ai calculé numériquement les taux couplage obtenu par redressement de la première alternance négative (même si l’algorithme développé détecte et permet de redresser toutes les alternances présentes dans un champ de vue donné). Les résultats sont présentés sur la figure Fig. 3.2.3. L’introduction d’un

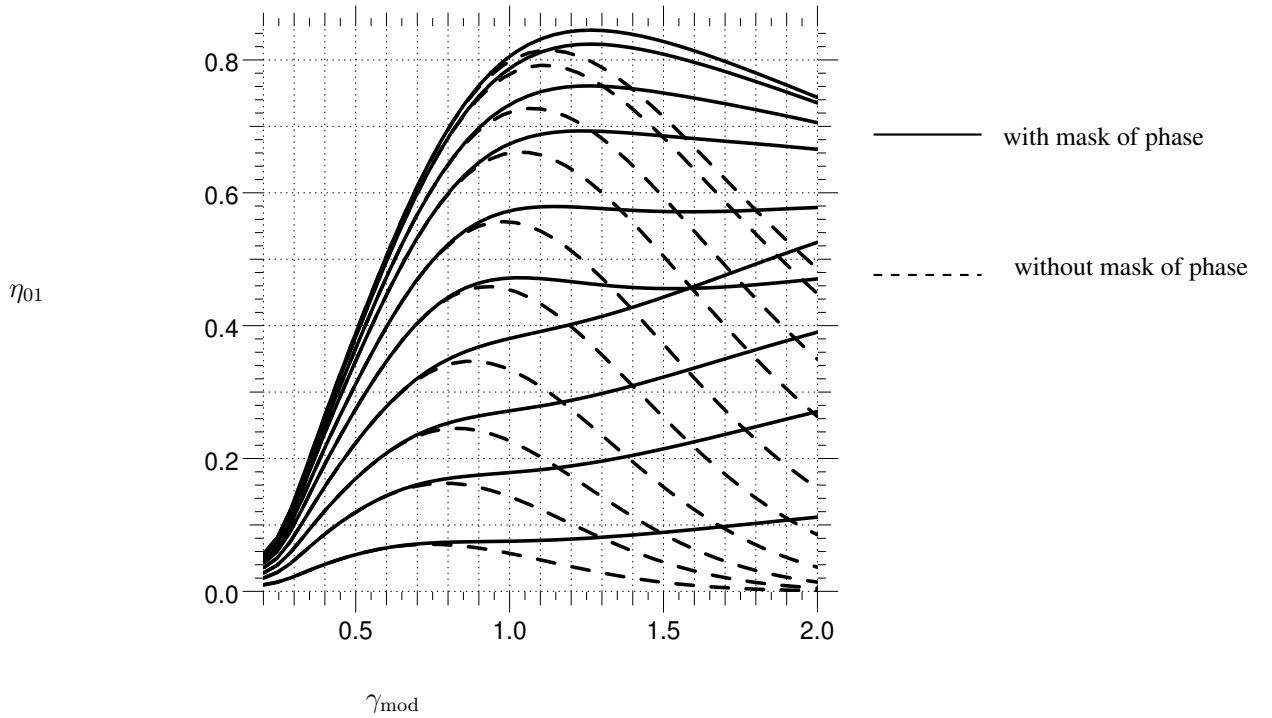


Fig. 3.5 – Taux de couplage d’une tâche d’Airy idéale, sans (trait pointillé) et après redressement (trait plein) de la première alternance négative, pour des rapports d’obscurité γ_{obs} variant de 0 à 0.9 par pas de 0.1.

masque de phase, n’agit que pour les valeurs du rapport γ_{opt} , supérieures à la valeur optimale obtenue sans le masque, dès lors que la première alternance négative rentre sous le profil du mode Gaussien et contribue significativement à la chute de l’intégrale de recouvrement. Ainsi aux grandes ouvertures numériques, son action est-elle inopérante. Le gain en couplage n’est significatif que dans le domaine aux faibles ouvertures numériques et aux fortes obscurations centrales. Le gain maximal obtensible sur le taux de couplage à obscurité centrale nulle n’est que de 4% en valeur absolue pour la figure de diffraction d’une source ponctuelle, après redressement de tous les lobes négatifs de la tâche d’Airy : soit un gain de 0.12 magnitude.

Pour fixer les idées, je me suis placé dans le contexte théorique du couplage électromagnétique d’une pupille non obscurée, sans masque de phase. Dans l’absolu, le processus d’optimisation du taux couplage est chromatique, du fait de la dépendance chromatique du mode fondamental. J’ai réalisé l’optimisation à la longueur d’onde de fonctionnement. Cette dernière conditionne par ailleurs la dépendance spectrale du taux de couplage de la tâche d’Airy sur toute la largeur d’une bande

astronomique, par simple déplacement chromatique du rapport γ_{mod} autour de sa valeur optimale γ_{opt} . On retiendra que sur une largeur d'une bande spectrale astronomique, le taux de couplage est quasi-achromatique. Ceci s'explique par la faible valeur de l'excursion (4%) du rapport γ_{mod} autour de la valeur optimisée traduisant le comportement homothétique au premier ordre avec la longueur d'onde de la carte transverse de champ associée à la tâche d'Airy mais aussi de celle du mode fondamental.

3.3 Les sorties du modèle

3.3.1 Distribution spectrale

L'ouverture numérique du système d'injection peut être ajustée pour que 81% de la puissance optique injectée par une tâche d'Airy idéale soit guidée sur le mode fondamental d'une fibre optique circulaire. Les 19% restant vont se répartir sur l'espace spectral décrit par la fréquence d'oscillation transverse ρ des modes rayonnés. Le modèle standard et la normalisation adéquate des modes rayonnés, permet de calculer la distribution du taux de couplage $S(\beta)$ sur l'espace spectral. Pour ce faire nous avons développé le paquet d'onde des modes rayonnés à la valeur du paramètre de guidage V correspondant à la longueur centrale de la bande K et calculé l'injection sur chacun de ses éléments. La distribution spectrale $S(\beta)$ des modes rayonnés obtenue numériquement c.f. Fig.3.6 montre clairement que la tâche d'Airy optimisée *n'excite pas significativement toutes les fréquences d'oscillation transverse de cet intervalle*. Nous avons donc restreint pour les raisons précédemment évoquées la limite inférieure de l'intervalle spectral des modes rayonnés à 97% de sa valeur maximale (k_2).

Nous avons vérifié à la précision numérique près que la *conservation de la puissance optique totale injectée était respectée, c'est à dire, $\int S(\beta)d\beta = 0.20$ pour le champ total* rayonné. Cette puissance est la puissance optique rayonnée normalisée développée par les modes rayonnés P_{rn} . Les 80% de l'énergie guidée représentent la puissance optique guidée normalisée, notée P_{gn} ³. La perte d'énergie due à une effet de troncature numérique du champ de vue le plan transverse de la fibre est ici négligeable, puisque l'on retrouve l'équation de conservation.

La distribution spectrale admet un pic centré à la fréquence spatiale $\bar{\beta} = 4.25 \mu\text{m}^{-1}$ que nous associerons au premier moment de la distribution $\bar{\beta}$. Il permet de mesurer l'angle caractéristique de fuite du paquet d'onde rayonnés dans $\bar{\theta}' = \arccos(\frac{\bar{\beta}}{k_2})$ est typiquement de 6 degrés. Notons que physiquement, cette valeur centrale correspond à la fréquence spatiale d'oscillation caractéristique de la tâche d'Airy privée de son lobe primaire.

3.3.2 Carte d'Intensité

Avec la distribution spectrale des modes rayonnés, la carte d'intensité tri-dimensionnelle de l'intensité du champ électromagnétique dans la fibre est sans doute la sortie majeure de la synthèse modale. Un coupe longitudinale de l'intensité de champ est représentée sur la figure Fig.3.7.

Cette carte illustre l'évacuation de l'énergie non filtrée dans la gaine. Les rebonds observés aux basses fréquences spatiales sur la distribution spectrale, sont directement visualisés sur la forme de directions secondaires de fuite moins évasées par rapport à l'axe optique. La topologie de l'intensité met en évidence la transition multimode-monomode dans la longueur de la fibre. Au delà d'un millier de longueur d'onde (2000 μm) le profil transverse de l'intensité lumineuse est stabilisé et correspond à celui du mode de propagation fondamental de la fibre.

³C'est le taux de couplage monomode désigné par η_{01} , plus haut dans le texte. $P_{\text{rn}} + P_{\text{gn}} = 1$.

Radiation modes distribution over spatial frequency

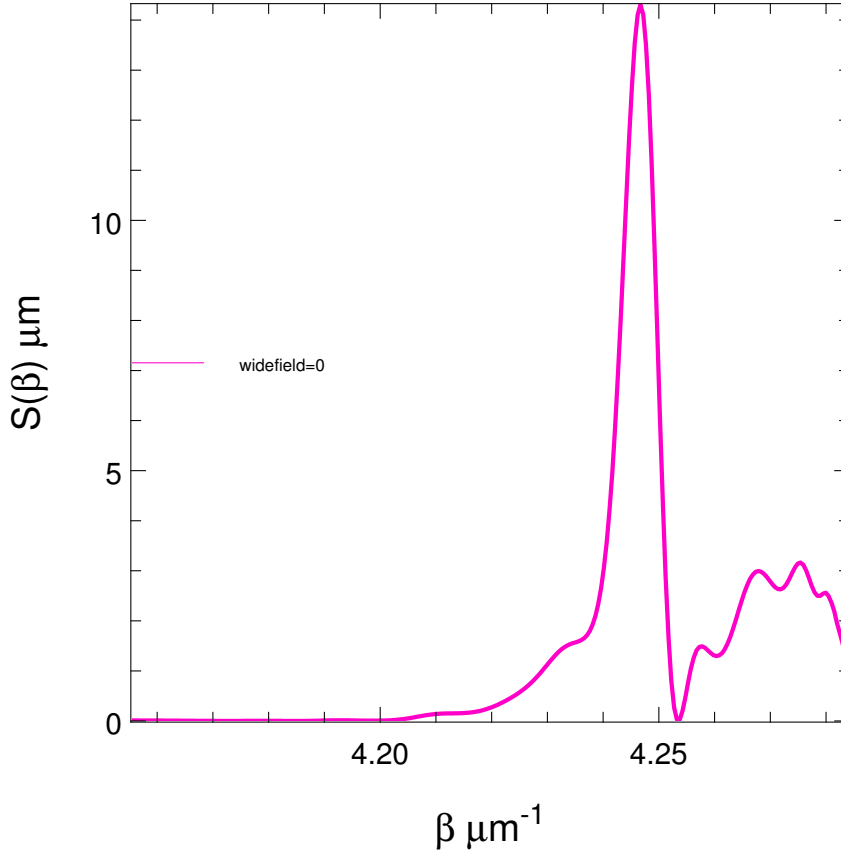


Fig. 3.6 – Distribution spectrale des modes rayonnés cas d’une tâche d’Airy idéale. Le pic principal correspond à la direction de fuite principale des modes rayonnés dans la gain (angle d’évasion $\bar{\theta}' = 6^\circ$ /axe optique) et les rebonds observés aux fortes valeurs de la constante de propagation axiale correspondent à des directions des angles de fuite moins élevés.

3.4 Décomposition des phénomènes

Pour avoir un éclairage plus important sur la transition du régime multimode au régime monomode, j’ai décomposé l’intensité lumineuse en séparant les contributions du champ rayonné et du mode fondamental, car Ce qui nous intéresse en sortie, c’est la qualité du champ de sortie réel du guide d’onde comparé au champ de sortie du mode guidé seul. L’algorithme de synthèse produit le champ sous la forme,

$$\psi(\mathbf{r}, z) = \psi_G(\mathbf{r}, z) + \psi_R(\mathbf{r}, z), \quad (3.14)$$

où ψ_G est le champ guidé (mode fondamental) et ψ_R est le champ rayonné. Quadratiquement, il forme aussi l’intensité correspondante,

$$\begin{aligned} I(r, z) &= I_G(r) + I_R(r, z) + I_{\text{cross}}(r, z) \\ I_R(r, z) &= |\psi_R|^2 \\ I_G(r) &= |\psi_G|^2 \\ I_{\text{cross}}(r, z) &= 2 \operatorname{Re}[\psi_G^*(r) \psi_R(r, z)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

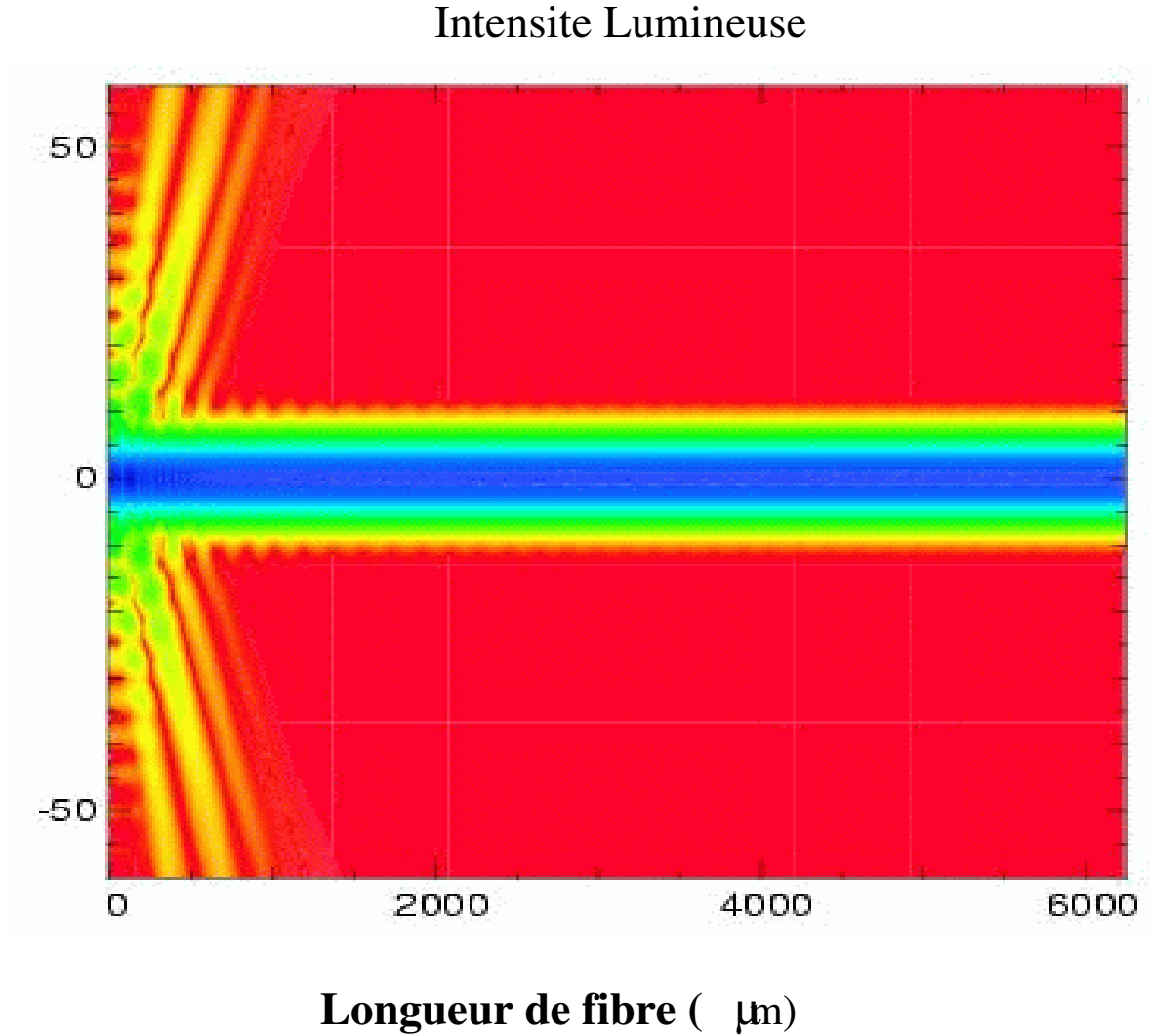


Fig. 3.7 – Coupe longitudinale de l'intensité de champ dans la fibre. Cas d'une tâche d'Airy idéale.

Il est important de constater que l'intensité lumineuse est la somme de trois contributions : celle produite par le champ guidé, celle produite par le champ rayonné et un *terme croisé quadratique provenant d'interférences entre le fondamental et le paquet d'onde rayonné*. Le modèle me permettant d'accéder individuellement au champ guidé et rayonné, et leur somme, il est alors possible séparer ces trois contributions. Celles-ci sont représentées sur la figure Fig.3.8.

Cette décomposition de l'intensité met en relief toute l'importance du phénomène interférentiel qui se produit entre le mode fondamental et le paquet d'onde rayonné. Si l'intensité rayonnée I_R décroît dans la longueur de la fibre (dépendance quadratique avec le champ rayonné) rapidement puisque les modes rayonnés sont en définitive évacués dans la gaine, le terme interférentiel I_{cross} est quant à lui entretenu dans la longueur de la fibre par le mode fondamental (dépendance linéaire avec le champ rayonné). Les interférences produisent un phénomène de battement entre le paquet d'onde rayonné et le mode fondamental nettement visible, qui peut être caractérisé par une oscillation longitudinale mesurée par la pulsation $\omega = \bar{\beta} - \beta_{01}$, où $\bar{\beta}$ est le centroïde de la distribution spectrale

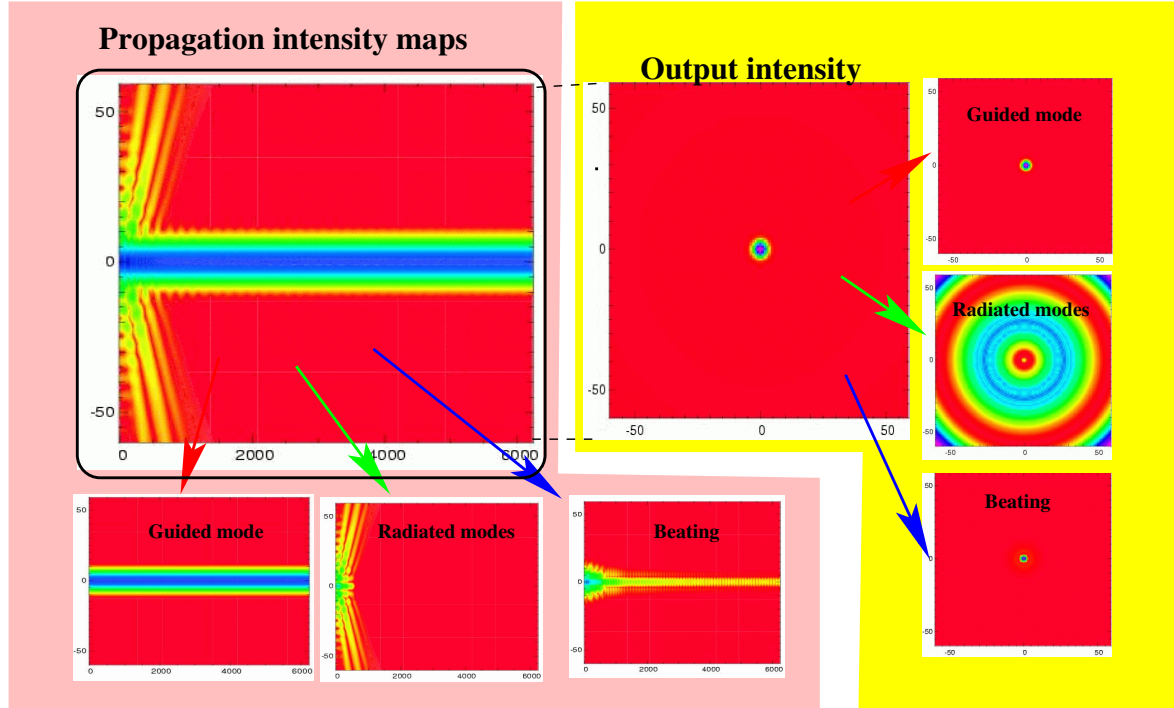


Fig. 3.8 – Illustration de l'intensité obtenue en sortie. Partie de gauche : carte 2D des intensités de sortie pour différentes valeurs de longueurs de guide z . Ce qui est représenté est la somme de l'intensité du mode guidé (à gauche), des modes rayonnés (au milieu) et du terme d'interférence (à droite). Partie de droite : carte traverse pour la longueur maximale. Ce qui est représenté est la somme de l'intensité du mode guidé (en haut), des modes rayonnés (au milieu) et du terme d'interférence (en bas).

et β_{01} la constante de propagation du mode fondamental. Transversalement ce battement reste confiné au voisinage du coeur grâce l'évanescence du mode fondamental dans la gaine. Ainsi loin du coeur, l'intensité rayonnée domine sur le battement, près du coeur, le terme de battement amplifié par le fondamental va l'emporter sur l'intensité rayonnée.

Il est possible d'avoir un éclairage mathématique symbolique sur les dépendances des différentes contributions à l'intensité de champ dans le guide en développant le paquet d'onde rayonné dans un voisinage limité autour de sa valeur centrale moyenne,

$$\psi_R(\mathbf{r}, z) \simeq e_{\bar{\beta}}(\mathbf{r}) \exp(i\bar{\beta}z) \int \sqrt{S(\beta)} \exp i(\beta - \bar{\beta})z d\beta, \quad (3.16)$$

où $e_{\bar{\beta}}(\mathbf{r})$ désigne la carte de champ rayonné correspondant à la composante centrale de la distribution spectrale. L'intégrale définit l'enveloppe complexe du paquet d'onde rayonné qui *détermine ses propriétés de cohérence spatiale dans la longueur de la fibre*. La synthèse modale approchée réduit le paquet d'onde à sa valeur centrale, elle présuppose que le mode guidé voit un groupe de modes rayonnés se déplaçant quasiment à la même vitesse moyenne $\bar{\beta}$. On suppose donc implicitement que la densité spectrale est peu dispersée autour de cette valeur centrale. En approchant celle-ci schématiquement par une gaussienne dont l'intégrale vaut la puissance rayonnée normalisée P_{rn} , et d'écart type σ_β ,

$$S(\beta) = P_{rn} \frac{1}{\sigma_\beta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\beta - \bar{\beta})^2}{2\sigma_\beta^2}\right). \quad (3.17)$$

On peut alors exprimer la décroissance du champ rayonné dans la longueur du guide,

$$\psi_R(\mathbf{r}, z) = \sqrt{P_{\text{rn}}} \sqrt{2\sigma_\beta} (2\pi)^{\frac{1}{4}} e_{\bar{\beta}}(\mathbf{r}) \exp(i\bar{\beta}z) \exp(-z^2\sigma_\beta^2). \quad (3.18)$$

Le flux rayonné normalisé étant donné par le carré de la norme du paquet d'onde à l'origine de la propagation on a,

$$\|e_{\bar{\beta}}\|^2 = \frac{1}{2\sigma_\beta\sqrt{2\pi}}, \quad (3.19)$$

relation montrant clairement l'impossibilité de réduire au sens strict du terme le paquet d'onde à une et une seule composante spectrale ($\sigma_\beta \rightarrow 0$) sous peine de voir le flux rayonné diverger.

Dans cette approximation, le paquet d'onde va décroître exponentiellement dans la longueur. La loi de décroissance est bien entendu relative au profil choisi pour décrire la densité spectrale du paquet d'onde. A l'origine ($z=0$) la puissance développée par le champ est égale à P_{rn} . La longueur de cohérence spatiale caractéristique du paquet d'onde rayonné est donc inversement proportionnelle à l'écart type de la distribution spectrale des modes rayonnés autour de sa moyenne. Elle peut-être définie comme la distance pour laquelle les modes du paquet sont déphasés de π radians relativement au mode central. La longueur caractéristique de la cohérence spatiale du paquet d'onde rayonné est typiquement, $L_c = \frac{\pi}{\sigma_\beta}$. On s'aperçoit que la vitesse décroissance axiale du paquet d'onde rayonnée est dictée par cette largeur équivalente. Les trois contributions à l'intensité totale s'écrivent alors,

$$\begin{aligned} I_R(\mathbf{r}, z) &= P_{\text{rn}} \frac{|e_{\bar{\beta}}(\mathbf{r})|^2}{\|e_{\bar{\beta}}(\mathbf{r})\|^2} \exp(-2z^2\sigma_\beta^2) \\ I_G(\mathbf{r}) &= P_{\text{gn}} |e_{01}(\mathbf{r})|^2 \\ I_{\text{cross}}(\mathbf{r}, z) &= 2\sqrt{P_{\text{rn}}P_{\text{gn}}} \operatorname{Re}\left[\frac{e_{\bar{\beta}}(\mathbf{r})}{\|e_{\bar{\beta}}(\mathbf{r})\|} e_{01}^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega z)\right] \exp(-z^2\sigma_\beta^2). \end{aligned} \quad (3.20)$$

En particulier, on voit bien que la perte de cohérence spatiale dans la longueur du guide du paquet d'onde rayonné induit une décroissance $\sqrt{2}$ fois plus rapide pour l'intensité purement rayonnée (quadratique sur le champ rayonné) que pour le terme de battement (linéaire sur le champ rayonné). A longue distance dans la fibre et au voisinage du coeur (évanescence du mode guidé dans la gaine), c'est bien le terme de battement qui finira par dominer la déviation au régime purement monomode.

3.5 Le flux mesuré

Dans cette section je m'intéresse à la quantification de la transition multimode - monomode en termes énergétiques, et à l'importance relative des composantes guidées, rayonnées et du terme d'interférence mis en évidence dans la partie précédente. On peut mesurer les déformations progressives du champ dans l'axe du guide en le projetant scalairement sur sa valeur initiale sur le plan d'entrée de la fibre (la tâche d'airy, par continuité). Le module de ce coefficient de couplage caractérise la transition du régime multimode-monomode en termes d'énergie. Le calcul peut être mené de manière exacte quelle que soit la distribution spectrale des modes réellement excitée. Si l'on définit le coefficient de couplage,

$$\eta(z) = \langle \psi(z) | \psi(0) \rangle \quad (3.21)$$

on aboutit, en tenant compte de l'orthogonalité entre le mode guidé et les modes rayonnés au résultat suivant,

$$|\eta(z)| = |P_{\text{gn}} + \exp(i\omega z) \int S(\beta) \exp i(\beta - \bar{\beta})z d\beta| \quad (3.22)$$

La transformée de Fourier de la densité spectrale intervient alors directement et exactement dans le calcul. Dans le cas d'une distribution gaussienne,

$$|\eta(z)| = |P_{\text{gn}} + P_{\text{rn}} \exp(i\omega z) \exp(-2\sigma_\beta^2 z^2)| \quad (3.23)$$

Ce coefficient complexe oscille à la fréquence spatiale du battement et mesure en module le transfert d'énergie dans la transition optique menant de la région multimode $\eta = P_{\text{gn}} + P_{\text{rn}}$ à la région monomode, $\eta = P_{\text{gn}}$. Il permet de mettre en évidence l'effet des modes rayonnés sur le transfert de l'énergie, qui se manifeste sous la forme d'une interférence avec le mode fondamental. Néanmoins cette définition formelle et souvent usitée dans la caractérisation des transitions optiques par les utilisateurs des méthodes de simulation type RSM⁴ n'est pas exactement notre observable, qui est plutôt le flux intégré dans une certain champ de vue transverse du guide. En effet c'est précisément ce flux qui sera imagé sur un pixel du détecteur dans un coronographe interférentiel. La puissance lumineuse mesurée sur le détecteur ne sera donc rien d'autre, dans ce qui suit, que l'intensité intégrée sur un certain domaine circulaire du plan transverse de rayon a_o sur ce plan.

$$\begin{aligned} P(a_o, z) &= \int_{r \leq a_o} \langle \psi(\mathbf{r}, z) \psi^*(\mathbf{r}, z) \rangle d\mathbf{r} \\ &= \|\psi_G\|_{a_o}^2(z) + \|\psi_R\|_{a_o}^2(z) + 2 \operatorname{Re} \langle \psi_G | \psi_R \rangle_{a_o}(z) \\ &= P_G(a_o) + P_R(a_o, z) + 2 \operatorname{Re}[P_{\text{cross}}(a_o, z)]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ce flux de photons est se décompose aussi en trois termes résultant de l'intégration sur le plan transverse des trois intensités précédentes. Il est traduit ici en termes de produits scalaires et de norme induites sur le domaine d'intégration. Nous avons donc,

- $P_G(a_o) = \int_{r \leq a_o} I_G(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r}$ le flux de photons guidés auquel s'ajoute
- $P_R(a_o, z) = \int_{r \leq a_o} I_R(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r}$ qui est le flux de photons correspondant aux modes rayonnés purs
- et $2 \operatorname{Re}[P_{\text{cross}}(a_o, z)] = \int_{r \leq a_o} I_{\text{cross}}(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r}$ qui correspond à un terme d'interférence (un battement) entre le mode guidé et les modes rayonnés.

On peut opter pour une formulation pratique du flux intégré sous la forme d'une équation interférométrique,

$$P(a_o, z) = P_G(a_o) + P_R(a_o, z) + 2\sqrt{P_G(a_o)P_R(a_o, z)} \operatorname{Re}[V_{\text{cross}}(a_o, z)], \quad (3.25)$$

où $V_{\text{cross}}(a_o, z)$ est la visibilité complexe du terme de battement. Elle est définie de manière générale par la relation,

$$V_{\text{cross}}(a_o, z) = \frac{P_{\text{cross}}(a_o, z)}{\sqrt{P_G(a_o)P_R(a_o, z)}}. \quad (3.26)$$

En utilisant le développement gaussien du paquet d'onde, le flux total est donc décrit de manière équivalente par le tryptique,

$$\begin{aligned} V_{\text{cross}}(a_o, z) &= \frac{\langle e_{01} | e_{\bar{\beta}} \rangle_{a_o}}{\|e_{01}\|_{a_o} \|e_{\bar{\beta}}\|_{a_o}} \exp(i\omega z) \\ P_R(a_o, z) &= P_{\text{rn}} \frac{\|e_{\bar{\beta}}\|_{a_o}^2}{\|e_{\bar{\beta}}\|^2} \exp(-2z^2 \sigma_\beta^2) \\ P_G(a_o) &= P_{\text{gn}} \frac{\|e_{01}\|_{a_o}^2}{1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

⁴Radiation spectral Method. Méthode de propagation numérique des modes rayonnés d'une structure guidante basée sur leur représentation spectrale.

La visibilité du battement résulte de l'intégrale de recouvrement sur la région d'intégration entre la carte de champ guidé et la carte de champ rayonné. C'est ce terme de couplage s'annule lorsque lorsqu'on agrandit progressivement la région d'intégration (prenant en compte un nombre toujours plus grand d'alternances négatives du champ rayonné) ; pour un rayon d'intégration infini, les cartes sont rigoureusement orthogonales, la visibilité du battement est nulle. En appliquant la formule du flux total lorsque $a_o \rightarrow \infty$, le flux intégré sur tout le plan transverse, $P_{\text{cross}}(z) = 0$, $P_R(z) = P_{\text{rn}} \exp -2z^2 \sigma_\beta^2$, $P_G = P_{\text{gn}}$. Le flux total correspond alors,

$$P(z) = P_{\text{gn}} + P_{\text{rn}} \exp -2z^2 \sigma_\beta^2, \quad (3.28)$$

ce qui permet de faire le lien avec le coefficient $|\eta(z)|$ utilisé en RSM. A l'inverse, en faisant tendre le rayon d'intégration transverse vers le pixel central, on voit très bien que la visibilité du battement tend vers un phaseur pur de module unitaire. En effet même si dans cette limite la composante de flux purement rayonnée P_R et guidée P_G s'annulent, la visibilité reste définie. L'intégrale de recouvrement se réduit au produit des valeurs centrales du champ guidé et rayonné. Le produit des normes euclidiennes associées aux champs tend aussi vers le produit de leurs valeurs centrales en module. Le module de la visibilité est donc unitaire. On pourra aussi noter que le développement du paquet d'onde prédit que la visibilité du battement est en module invariante par translation dans la longueur de la fibre.

La puissance rayonnée P_R décroît avec le rayon d'intégration (on intègre moins d'alternances du champ rayonné redressées quadratiquement dans le rayon donné). Le terme guidé P_G est important essentiellement au niveau du coeur devenant très vite négligeable dans la gaine, à cause de l'évanescence transverse des modes guidés. Cette puissance est invariante par translation dans l'axe de la fibre. Pour des régions d'intégration de dimension plus grande que la profondeur d'évanescence dans la gaine du mode gaussien cette puissance est peu différente de la puissance guidée normalisée P_{gn} ($\|e_{01}\|_{a_o} \simeq 1$).

La figure Fig.3.9 illustre la transition multimode-monomode en terme de flux total partiellement intégré dans le plan transverse du guide. La figure du haut représente une coupe du flux total dans la longueur de la fibre pour diverses régions d'intégration. Le niveau initial ($z = 0 \mu\text{m}$) des courbes est donné par l'intégration partielle du flux sous la tâche d'airy multimode. Le niveau final des courbes ($z = 2000 \mu\text{m}$) correspond aux flux intégrés partiellement sous le profil d'intensité du mode fondamental P_G . Ces deux niveaux sont tracés sur la figure du bas en fonction du rayon d'intégration. A fort rayon d'intégration, le flux non monomode est dominé par la contribution purement rayonnée P_R : la visibilité du battement est négligeable, les courbes de flux sont lisses. Pour $2 < a_o < 32$ rayons de coeur, le niveau de flux initial chute drastiquement tandis que le niveau final varie peu, d'où une impression progressive de "tassement" des courbes à mesure que le rayon d'intégration décroît. Lorsque l'on réduit encore le rayon d'intégration en dessous de 2 rayons de coeur, le niveau final se met soudainement à chuter car l'on intègre partiellement dans le coeur du mode fondamental. Le profil de décroissance du flux est perturbé et oscille de plus en plus car parallèlement la visibilité du battement augmente. Il s'ensuit que la qualité de la convergence vers la valeur de flux monomode P_G dépend non seulement de la distance de propagation mais aussi de la zone d'intégration choisie.

3.6 Le taux de réjection

Nous allons désormais définir la qualité de la convergence au régime monomode c'est à dire définir un taux de réjection du flux multimode qui ait un sens. On peut le définir à une longueur de propagation donnée comme l'erreur relative au flux monomode atteint asymptotiquement (à une longueur

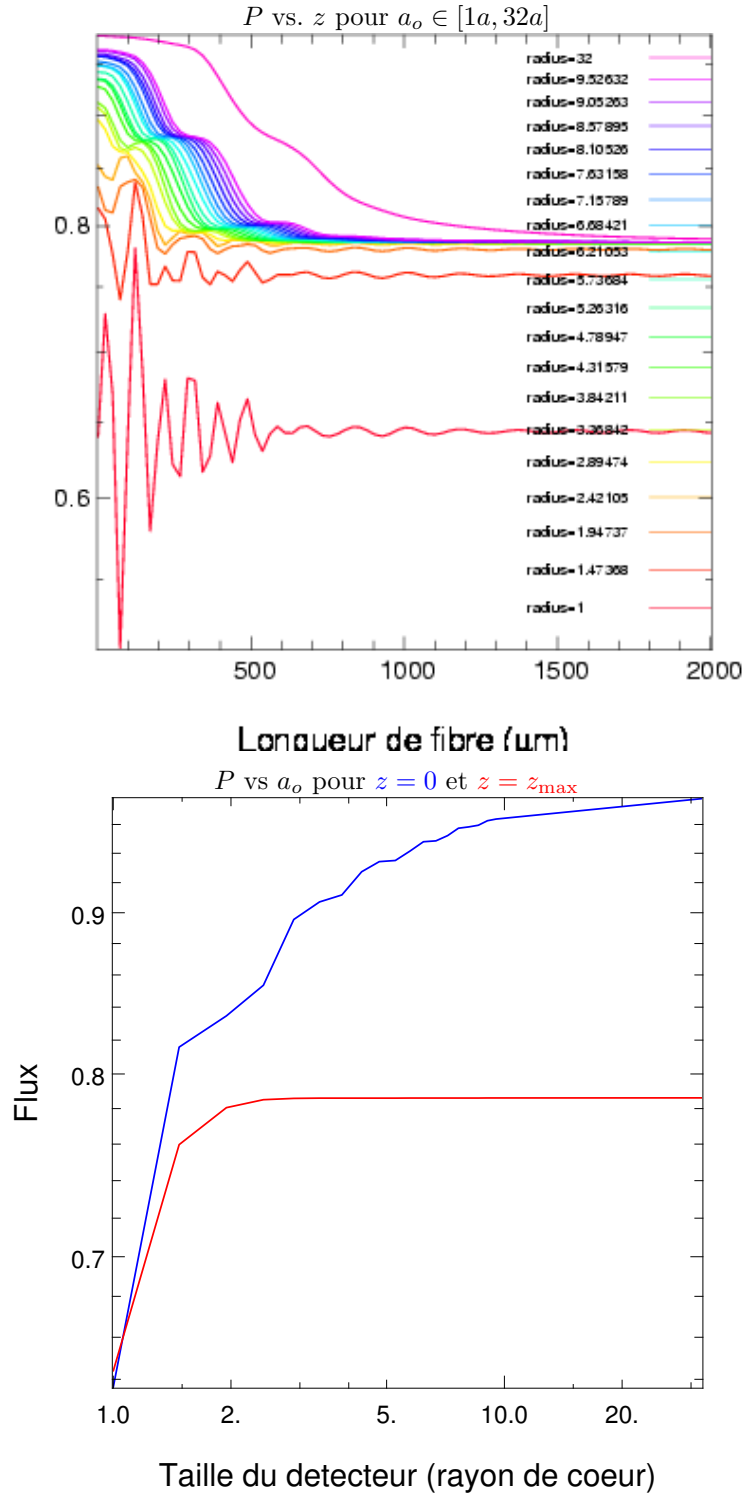


Fig. 3.9 – En haut : Evolution du flux intégré dans la zone de transition multimode-monomode pour diverses zones d'intégration. En bas : Flux partiellement intégré en début et en fin de propagation en fonction du rayon d'intégration.

de propagation infinie dans l'absolu.)

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(a_o, z) &= \frac{P(a_o, z) - P_G(a_o)}{P_G(a_o)} \\
&= \frac{P_R(a_o, z)}{P_G(a_o)} + \frac{2 \operatorname{Re}[P_{\text{cross}}(a_o, z)]}{P_G(a_o)} \\
&= \frac{P_R(a_o, z)}{P_G(a_o)} + 2 \sqrt{\frac{P_R(a_o, z)}{P_G(a_o)}} \operatorname{Re}[V_{\text{cross}}(a_o, z)] \\
&= \mathcal{R}_R(a_o, z) + \mathcal{R}_{\text{cross}}(a_o, z)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Nous décomposons donc le taux de réjection en une contribution rayonnée pure et une contribution due au battement. La figure 3.10 illustre la contribution du terme venant purement des modes rayonnés ainsi que celle venant des battements entre le champ rayonné et le champ guidé (en module). Pour des rayons d'intégration tels que $1 < a_o < 32$ rayons(s) de coeur. Il est intéressant de remarquer que l'évolution des courbes avec le rayon d'intégration a_o est *inverse* pour les deux contributions au taux de réjection total. A l'instar du flux rayonné P_R , le taux de réjection des modes rayonnés \mathcal{R}_R est une fonction décroissante de la taille de la région d'intégration. Il se produit exactement le contraire pour la contribution du battement au terme de réjection $\mathcal{R}_{\text{cross}}$. Ceci s'explique car les deux contributions sont liées par la relation,

$$\mathcal{R}_{\text{cross}} = 2 \sqrt{\mathcal{R}_R} \operatorname{Re}[V_{\text{cross}}], \tag{3.30}$$

et nous avons vu que le module de la visibilité du battement est une fonction décroissante du rayon d'intégration a_o . Il en va donc de même pour en ce qui concerne la contribution du battement au taux de réjection $|\mathcal{R}_{\text{cross}}|$.

La décroissance des taux de réjection dans l'axe de la fibre doit être comprise au sens de l'enveloppe de cohérence spatiale des modes rayonnés. Cette enveloppe de cohérence est définie par la transformée de Fourier de leur densité spectrale. Dans le cas d'une modélisation gaussienne de la densité spectrale des modes rayonnés nous obtenons une loi de décroissance gaussienne pour le taux de réjection des modes rayonnés \mathcal{R}_R . La vitesse de décroissance est dans ce cas,

$$\frac{\partial \mathcal{R}_R(a_o, z)}{\partial z} = \frac{P_{\text{rn}}}{P_{\text{gn}}} \frac{\|e_{\beta}\|_{a_o}^2}{\|e_{\beta}\|^2} \frac{1}{\|e_{01}\|_{a_o}^2} 4z\sigma_{\beta}^2 \exp -2z^2\sigma_{\beta}^2. \tag{3.31}$$

Ainsi le taux de réjection linéique mesurant la vitesse de décroissance du taux de réjection par unité est une fonction tendant asymptotiquement vers 0, à la limite d'une longueur de fibre infinie. La vitesse de convergence au régime monomode ralentit avec la distance. Il n'est pas surprenant de voir la pente des taux de réjection obtenus numériquement s'infléchir progressivement suivant la distance parcourue dans l'axe de la fibre. La largeur à mi-hauteur du profil de décroissance obtenu permet de mesurer la longueur de cohérence L_c du paquet d'onde rayonné. On peut estimer que celle-ci de l'ordre de $L_c \simeq 500 \mu\text{m}$, soit $\sigma_{\beta} = 2/L_c = 0.04 \mu\text{m}^{-1}$, une valeur cohérente avec l'écart-type du pic principal de la distribution spectrale. L'évolution du taux de réjection du battement dans la longueur de la fibre est calquée sur celle de la racine carré du taux de réjection des modes rayonnés (la visibilité du battement étant faiblement dépendante de la propagation l'axe).

A partir du niveau global des taux de réjection atteints en sortie de la zone de cohérence des modes rayonnés, on peut donner une estimation grossière du module de la visibilité V_{cross} à l'aide de la relation précédente. A fort rayon d'intégration, sur la plage $7a < a_o < 32a$, en prenant $|\mathcal{R}_{\text{cross}}| \simeq 10^{-7}$, $\mathcal{R}_R \simeq 10^{-4}$ soit $|V_{\text{cross}}| \simeq 5.10^{-6}$. A forts rayons d'intégration on pourra donc réduire l'expression

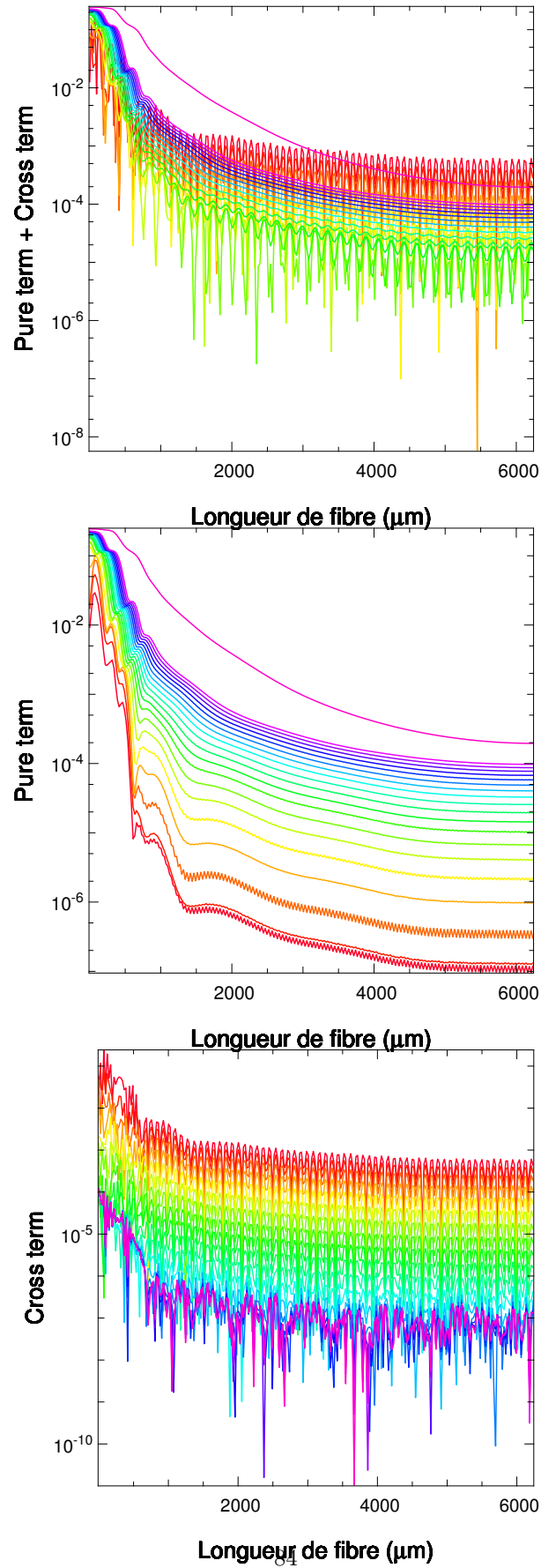


Fig. 3.10 – Taux de réjection dans le cas d’une tâche d’Airy idéale. En haut : réjection totale ; au centre : Taux de réjection des modes rayonnés ; En bas : contribution du terme de battement. Les courbes sont tracées pour différents rayons d’intégration $1a < a_o < 32a$.

du taux de réjection à sa contribution rayonnée. Le taux de réjection global, s'identifie au taux de réjection des modes rayonné. Dans l'approximation gaussienne de la densité spectrale on aura,

$$\mathcal{R}(a_o, z) \simeq \mathcal{R}_R(a_o, z) = \frac{P_{rn}}{P_{gn}} \frac{\|e_{\bar{\beta}}\|_{a_o}^2}{\|e_{\bar{\beta}}\|^2} \frac{1}{\|e_{01}\|_{a_o}^2} \exp -2z^2 \sigma_{\beta}^2, \quad (3.32)$$

et à la limite $a_o \rightarrow \infty$, la visibilité est nulle $V_{\text{cross}} = 0$, et dans l'approximation gaussienne de la densité spectrale, le taux de réjection total est donné par,

$$\mathcal{R}(z) = \frac{P_{rn}}{P_{gn}} \exp -2z^2 \sigma_{\beta}^2. \quad (3.33)$$

Pour des rayons d'intégration intermédiaires, au voisinage de l'optimum $a_o = 5a$ la visibilité du battement reste faible, on gagne seulement un facteur 1000 par rapport aux cas précédents mais c'est suffisant pour avoir un terme de battement $|\mathcal{R}_{\text{cross}}|$ du même ordre de grandeur (10^{-5}) que la contribution purement rayonnée \mathcal{R}_R . On ne peut plus négliger le terme de battement devant le terme purement rayonné.

Enfin très près du coeur $a_o = a$ (courbe rouge), en prenant $|\mathcal{R}_{\text{cross}}| \simeq 10^{-3}$, $\mathcal{R}_R \simeq 3 \cdot 10^{-6}$ on obtient une visibilité $|V_{\text{cross}}| \simeq 0.8$. Le taux de réjection total est au contraire cette-fois ci globalement dominé par le battement. Dans ce régime, on pourra assimiler le taux de réjection global à la réjection du terme de battement, et dans l'approximation gaussienne de la densité spectrale on aura,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(a_o, z) \simeq \mathcal{R}_{\text{cross}}(a_o, z) &= \sqrt{\frac{P_{rn}}{P_{gn}}} \exp -z^2 \sigma_{\beta}^2 \text{Re}[V_{\text{cross}}(a_o, z)] \\ V_{\text{cross}}(a_o, z) &= \frac{< e_{01} | e_{\bar{\beta}} >_{a_o}}{\|e_{01}\|_{a_o} \|e_{\bar{\beta}}\|_{a_o}} \exp i\omega z \end{aligned} \quad (3.34)$$

A la limite ou $a_o \rightarrow 0$ la visibilité du battement est maximale $|V_{\text{cross}}| = 1$, la visibilité complexe est un phaseur pur de phase $\phi(V_{\text{cross}})$ et on aura,

$$\mathcal{R}(a_o, z) = \sqrt{\frac{P_{rn}}{P_{gn}}} \exp -z^2 \sigma_{\beta}^2 \text{Re}[\exp i\omega z + i\phi(V_{\text{cross}})] \quad (3.35)$$

Par conséquent le taux de réjection global optimum n'est donc pas nécessairement obtenu pour le plus faible rayon d'intégration considéré dans le plan transverse du guide. La simulation numérique renvoie un optimum pour 5 rayons de coeur $a_o = 5a$ (courbe verte). Pour mieux préciser cette notion de rayon optimal pour la région d'intégration transverse, l'évolution des coupes transverses du taux de réjection total dans la longueur de la fibre est représentée sur la figure Fig.3.11. La formation d'une vallée du taux de réjection en fonction de la taille de la région d'intégration est manifeste et localisée autour de $a_o = 5a$.

Il faut insister sur le fait que l'existence d'une région d'intégration optimale pour la définition du taux de réjection est une notion relative aux paramètres de la simulation numérique ici présentée ici. Il s'agit avant tout d'une notion locale dans l'espace des paramètres utilisés. Le champ de vue axial est ici limité ainsi que la plage de rayons d'intégration choisies. Et la localisation de l'optimum se déplace dans cet espace de paramètres. On peut se poser la question de l'évolution de la vallée de la réjection et de son comportement asymptotique à des distances de propagation ultérieures. A cause de sa dépendance quadratique avec le champ rayonné, le taux de réjection \mathcal{R}_R diminue plus vite dans l'axe que celui du battement $\mathcal{R}_{\text{cross}}$ qui dépend seulement linéairement du champ rayonné et dont la dépendance est donc en $\sqrt{\mathcal{R}_R}$. En incrémentant la distance de propagation, on perturbe

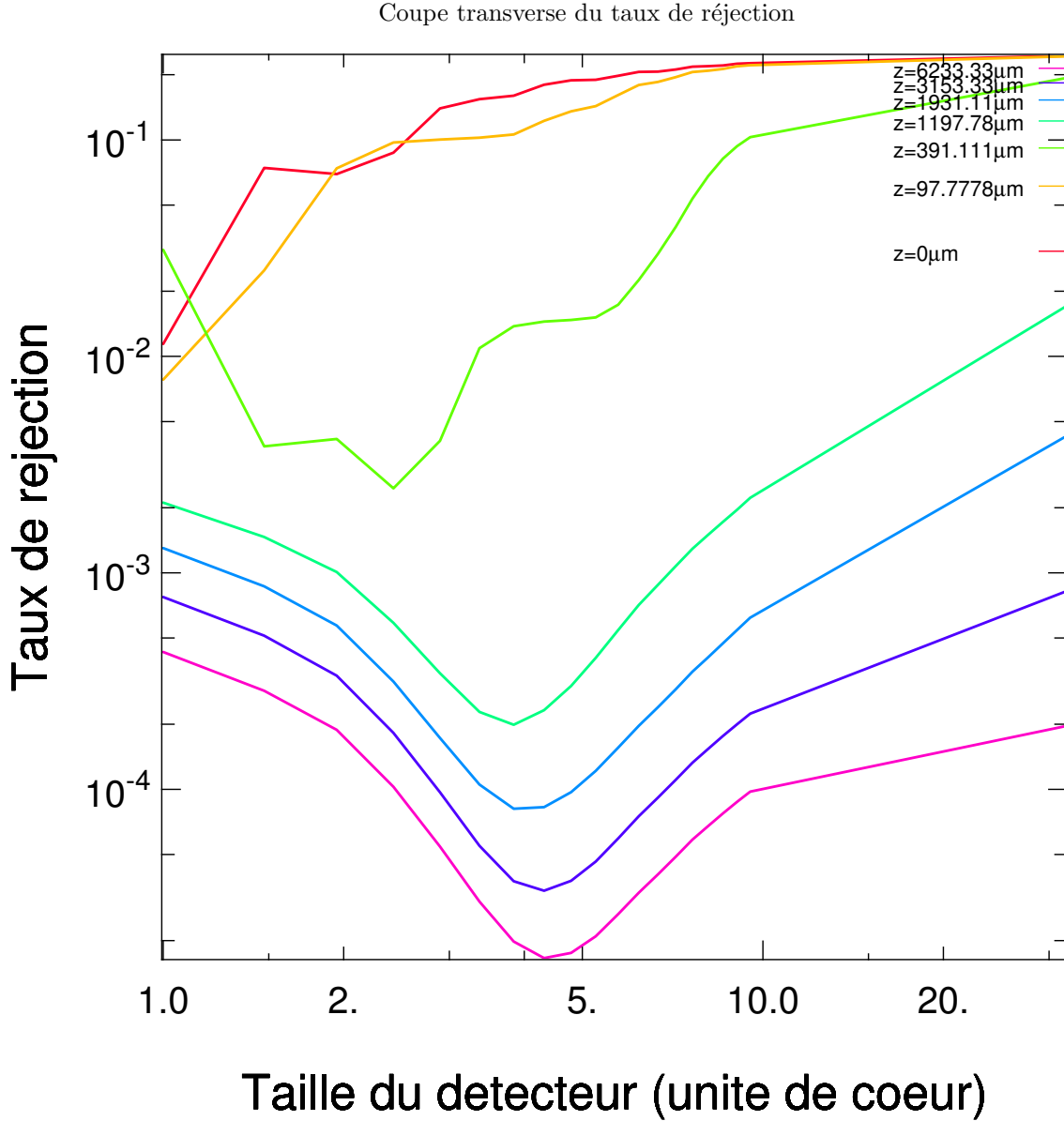


Fig. 3.11 – Optimum sur la région d'intégration pour le taux de réjection. Le taux de réjection total \mathcal{R} est présenté en diverses abscisses longitudinales z dans la longueur de la fibre en fonction de la taille de la région d'intégration a_o .

l'équilibre initialement au voisinage du rayon optimum et pour lequel les deux termes sont du même ordre de grandeur en amplitude. On retrouve l'équilibre des deux termes à une valeur du rayon plus importante a_o pour laquelle la visibilité du battement et donc son taux de réjection est plus faible. Ainsi l'optimum a tendance à être rejeté vers les hautes valeurs du rayon d'intégration dans la distance. Une extrapolation linéaire aux grandes distances de l'angle de fuite du rayon optimum par rapport à l'axe optique, mesuré localement à partir des 6 mm de fibre simulés, livre $\frac{\delta a_o}{\delta z} = \frac{20 \mu\text{m}}{10\text{cm}}$ par dizaine de centimètre de fibre parcourue.

Inversement aux très courtes distances de propagation (typiquement la centaine de microns) dans la zone de cohérence des modes rayonnées, le taux de réjection est grandement dominé par le terme pu-

rement rayonné \mathcal{R}_R dans la plage de rayons considérées [1, 32a] et aucun optimum ne se dessine. Dans ce cas, le taux de réjection global décroît toujours lorsque l'on réduit la taille du détecteur. Il faudrait augmenter la visibilité du battement, i.e. explorer la région interne du coeur, pour éventuellement voir apparaître l'optimum.

Notons enfin que la localisation transverse de l'optimum dépend aussi de la profondeur d'évanescence du mode fondamental dans la gaine qui est réglée par le paramètre de guidage V . Nous avons choisi le cas d'un confinement maximal du mode fondamental en nous plaçant à la coupure monomode. L'amplification linéaire du battement avec le mode guidé aurait lieu plus loin dans la gaine. L'optimum du taux de réjection serait alors délocalisé vers de plus grandes valeurs de rayon d'intégration avec le paramètre de guidage V .

La prise en compte du battement dans la définition du taux de réjection est importante, car c'est en définitive lui qui limite la qualité de la réjection des modes rayonnés par la structure guidante. Il représente véritablement le résidu des modes rayonnés dans le coeur du guide à longue distance. A une distance de propagation donnée, il freine la décroissance du taux de réjection. La plupart du temps dans le contexte de l'interférométrie stellaire, ce terme battement est tout simplement ignoré (Mège& Malbet [65], Wallner [108]) et le taux de réjection global de la fibre optique est réduit à sa composante rayonnée \mathcal{R}_R . Dans ce contexte il n'y aura pas d'optimum transverse pour le taux de réjection qui ne cesse de décroître avec le rayon d'intégration choisi. Le modèle permet d'obtenir un taux de réjection meilleur que 10^{-6} , en bout de fibre, au rayon de coeur. On peut justifier cet oubli a posteriori dans le cadre de la coronographie interférentielle. Effectivement on peut s'attendre à ce que ce couplage linéaire disparaisse après recombinaison des modes guidés en opposition de phase. Cependant, ce constat n'est vrai que pour les modes rayonnés excités par le signal stellaire sur chacune des voies. Mais il ne l'est pas, ni pour le signal planétaire qui n'est pas en interférences destructives, ni, pour la même raison, pour le signal de fuite stellaire⁵ du coronographe interférentiel. La prise en compte du battement dans notre cas réduit le taux de réjection d'une magnitude (10^{-5}) en bout de fibre, et ceci à l'optimum $a_o = 5a$.

3.7 Aberrations statiques

Dans cette section je vais examiner qualitativement l'influence des conditions d'injection sur le taux de réjection. Le but est de perturber la tâche d'Airy idéale par des aberrations statiques. J'ai calculé la propagation du champ électrique d'un champ perturbé par des aberrations simples.

3.7.1 Représentation modale

Les aberrations de phase ont été représentées par des polynômes de Zernike sur la pupille d'entrée du système optique d'injection. La restriction sur le support d'une pupille individuelle P , de la phase d'aberration ϕ où P désigne la fonction indicatrice d'une pupille circulaire de diamètre D et de surface S est représentable au moyen d'un développement en série de modes polynômiaux d'ordre croissant, orthogonaux entre eux. Ces modes, ont été introduits par Zernike pour l'analyse classique des aberrations optiques ([10]). Les polynômes de Zernike peuvent être décrits en coordonnées polaires ρ, θ sur une pupille circulaire P non obscurée de diamètre D comme des fonctions de la fréquence azimutale m et du degré radial n , avec $m \leq n$ et $m - n$ pair. Pour l'analyse statistique des aberrations,

⁵le signal de fuite est défini comme la fluctuation de signal stellaire mesurée à la sortie destructive du coronographe.

Tab. 3.2 – Expression analytique des premiers polynômes de Zernike et leur dénomination courante dans la théorie des aberrations optiques.

n/m	0	1	2
0	$Z_1 = 1$ Piston		
1		$Z_2 = 2r \cos(\theta)$ $Z_3 = 2r \sin(\theta)$ Tilts	
2	$Z_4 = \sqrt{3}(2r^2 - 1)$ Defocus		$Z_5 = \sqrt{6}r^2 \sin(2\theta)$ $Z_6 = \sqrt{6}r^2 \cos(2\theta)$ Astigmatisme
3		$Z_7 = \sqrt{8}(3r^3 - 2r) \sin(\theta)$ $Z_8 = \sqrt{8}(3r^3 - 2r) \cos(\theta)$ Coma	
4	$Z_{11} = \sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1)$ 3e ordre sphérique		$Z_{12} = \sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \cos(2\theta)$ $Z_{13} = \sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \sin(2\theta)$

atmosphériques ils sont classiquement ré-ordonnés selon un seul index j dont les valeurs paires correspondent aux modes symétriques $\cos(m\theta)$ et les valeurs impaires aux modes antisymétriques en $\sin(m\theta)$, c.f. Table.3.2. En posant $\mathbf{r} = \frac{2\rho}{D}$ le rayon adimensionné sur la pupille,

$$\begin{aligned}
Z_{\text{even}}(r, \theta) &= \sqrt{2}\sqrt{n+1}R_n^m(r) \cos(m\theta) \quad m \neq 0 \\
Z_{\text{odd}}(r, \theta) &= \sqrt{2}\sqrt{n+1}R_n^m(r) \sin(m\theta) \quad m \neq 0 \\
Z(r, \theta) &= \sqrt{n+1}R_n^0(r) \quad m = 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

ou R_n^m est le polynôme radial de Zernike donné par,

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-)^s (n-s)! r^{n-2s}}{s! [(n+m)/2 - s]! [\frac{n-m}{2} - s]!} \tag{3.37}$$

Les polynômes de Zernike ainsi définis sont orthonormalisés au sens du produit scalaire euclidien défini sur la pupille circulaire,

$$\begin{aligned}
\phi_1 | \phi_2 &= \frac{1}{S} \int P(\rho) \phi_1(\rho) \phi_2(\rho) d\rho \\
Z_i | Z_j &= \delta_j^i
\end{aligned} \tag{3.38}$$

La relation d'orthonormalisation implique, qu'à l'exception du mode piston Z_1 , la moyenne spatiale de tous les polynômes de Zernike est nulle,

$$1 | Z_i \begin{cases} = 0 & \forall i > 1 \\ = 1 & i = 1 \text{ pour mode piston} \end{cases} \tag{3.39}$$

Les polynômes de Zernike sont donc normalisés au sens d'une variance *spatiale* unitaire sur la pupille, à l'exception du mode piston pour lequel cette dernière est évidemment nulle. Le développement en série de l'aberration sur le support d'une fonction pupille individuelle s'écrit donc,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \sum_1^\infty a_i Z_i(\mathbf{r}) \\ a_i &= \phi|Z_i\end{aligned}\tag{3.40}$$

où a_i est l'amplitude de chaque polynôme de Zernike obtenue par simple projection orthogonale des fluctuations de phase atmosphérique ϕ sur chaque polynôme. La variance spatiale des fluctuations de phase sur le support de pupille circulaire est définie par,

$$\sigma^2 = \sum_{i \in [2, \infty]} a_i^2, \tag{3.41}$$

3.7.2 Tip-Tilt et Defocus

J'ai choisi d'examiner la répercussion de deux aberrations individuelles sur le spectre des modes rayonnés. Le tip-tilt ($i = 2, 3$) et le défocus ($i = 4$). L'amplitude de l'aberration introduite est mesurée par l'amplitude a_i (ou la variance spatiale) du polynôme de Zernike correspondant. Cette mesure peut-être convertie en une grandeur plus parlante qui est pour le tip-tilt, l'angle d'arrivée δ_α induit sur la tête de fibre, et pour le defocus, la défocalisation sur l'axe exprimée en unité de longueur d'onde $\frac{\delta_z}{\lambda}$. En suivant le théorème du déplacement (Born & Wolf [10]), l'addition linéaire d'aberrations du type,

$$\phi(\mathbf{r}) = 2\sqrt{3}a_4 r^2 + 2a_{2,3} r \sin(\theta) \tag{3.42}$$

produit seulement un déplacement d'ensemble de la distribution d'intensité imagée qu' foyer du système optique. Le déplacement induit est mesuré par,

$$\begin{aligned}\frac{\delta_z}{\lambda} &= \left(\frac{F}{D}\right)^2 \frac{2\sqrt{3}a_4}{\pi} \\ \frac{\delta\alpha}{D} &= \frac{a_{2,3}}{\pi}\end{aligned}\tag{3.43}$$

La procédure d'injection de flux est équivalente à celle décrite pour la tâche d'airy idéale. L'ouverture numérique F/D du système optique d'injection est calculée de manière à optimiser le flux couplé sur le mode fondamental sans aberrations. Diverses amplitudes du basculement de front d'onde $\frac{\delta\alpha}{\lambda D}$ et de défocalisation ($\frac{\delta_z}{\lambda}$) sont alors prescrites. Elles sont traduites en amplitude (a_i) à appliquer sur le polynôme décrivant l'aberration.

L'amplitude du defocus est restreinte à des valeurs positives impliquant un déplacement linéaire de l'image en aval de la tête de fibre. L'amplitude du defocus est important, variant sur la plage $[0 - 40]\lambda$. Le caractère centro-symétrique du defocus permet de restreindre l'analyse sur le premier ordre azimutal dans le même esprit que pour la tâche d'Airy non perturbée. L'analyse modale du champ rayonné excité par le basculement est quant à elle réalisée sur 10 ordres azimutaux. A contrario les amplitudes de basculement choisies sont modestes et n'excèdent pas $0.32 \frac{\lambda}{D}$.

Les aberrations induisent une modification structurelle de la distribution spectrale des modes rayonnés par rapport au cas idéal. Dans le cas d'une aberration de forte amplitude, les modifications induites sont de deux ordres. D'une part un report de l'énergie aux basses fréquences spatiales (au grandes vitesses de propagation β) provoquant un étalement de la fonction de distribution autour

de sa valeur centrale. D'autre part une augmentation significative de l'amplitude de la fonction de distribution. L'aire sous la distribution spectrale augmente très vite avec la force de l'aberration. On perd significativement de la puissance guidée normalisée P_{gn} (taux de couplage monomode) au profit de la puissance rayonnée normalisée P_{rn} .

3.7.3 Densités spectrales

La présence d'aberrations va modifier la distribution spectrale des modes rayonnés. Les densités spectrales obtenues sont représentées sur la figure Fig.3.12. Si l'élargissement de la fonction de distribution est favorable à la réjection des modes rayonnés induisant une longueur de cohérence plus faible du paquet d'onde dans la longueur de la fibre, la perte du taux de couplage monomode est au contraire catastrophique. Un déséquilibre du rapport $\frac{P_{\text{gn}}}{P_{\text{rn}}}$ au profit du rapport des modes rayonnés contraindra proportionnellement le l'amplitude du taux de réjection des modes rayonnés à des valeurs plus importantes. Le taux de réjection linéique sera certes plus important grâce à l'augmentation de la dispersion spectrale, mais les courbes partiront d'un niveau initial beaucoup plus élevé. Dans le cas du tip-tilt d'amplitude modéré on constate que la forme de la distribution spectrale est peu changée. L'effet attendu de l'aberration sera simplement une modification du rapport $\frac{P_{\text{gn}}}{P_{\text{rn}}}$. Les propriétés de décohérence spatiale du paquet d'onde dans la longueur de la fibre seront peu changées. Par rapport au cas idéal les taux de réjection obtenus seront augmentés homothétiquement.

3.7.4 Chartes de réjection

La figure Fig.3.13 illustre les taux de réjection obtenus avec les aberrations. Nous avons considéré le taux de réjection global pour un région d'intégration fixée ($a_o = 5a$). Les taux réjection sont tracés sous formes de chartes de contour pour lesquelles l'abscisse représente la distance de propagation et l'ordonnée la force de l'aberration concernée.

Sur la plage $[0 - 20]\lambda$, les taux de réjection obtenus après défocalisation sont homothétiques de la force de l'aberration introduite. Ce régime est clairement celui du tip-tilt de faible amplitude limitée à $[0 - 0.3]\frac{\lambda}{D}$. On est typiquement dans le régime de faible perturbation décrit précédemment. Le profil de décroissance du taux de réjection dans la longueur de la fibre est indépendant de la force de l'aberration, qui se manifeste seulement par une augmentation globale du taux de réjection. L'augmentation du rapport $\frac{P_{\text{gn}}}{P_{\text{rn}}}$ cause la perte de visibilité du battement en bout de fibre. Le terme $\mathcal{R}_{\text{cross}}$ dépend de la racine carrée de ce ratio et augmente moins vite que le terme rayonné pur (qui lui en dépend linéairement).

Le régime des aberrations de fortes amplitude se manifeste pour la défocalisation sur la plage $[20 - 40]\lambda$. Le début de la plage correspond à la transition du report de l'énergie des modes rayonnés aux basses fréquences. Le pic principal de la distribution spectrale non perturbée est détruit au profit d'un pic plus étalé en vitesse de propagation axiale. Au delà de 20λ l'énergie commence à augmenter fortement sous le nouveau pic. Des modifications structurelles du taux de réjection apparaissent dans la longueur de la fibre.

3.8 Conclusion

L'outil de propagation comprenant tout le signal guidé et rayonné développé dans le chapitre précédent nous permet de livrer une première quantification énergétique de la réjection des modes

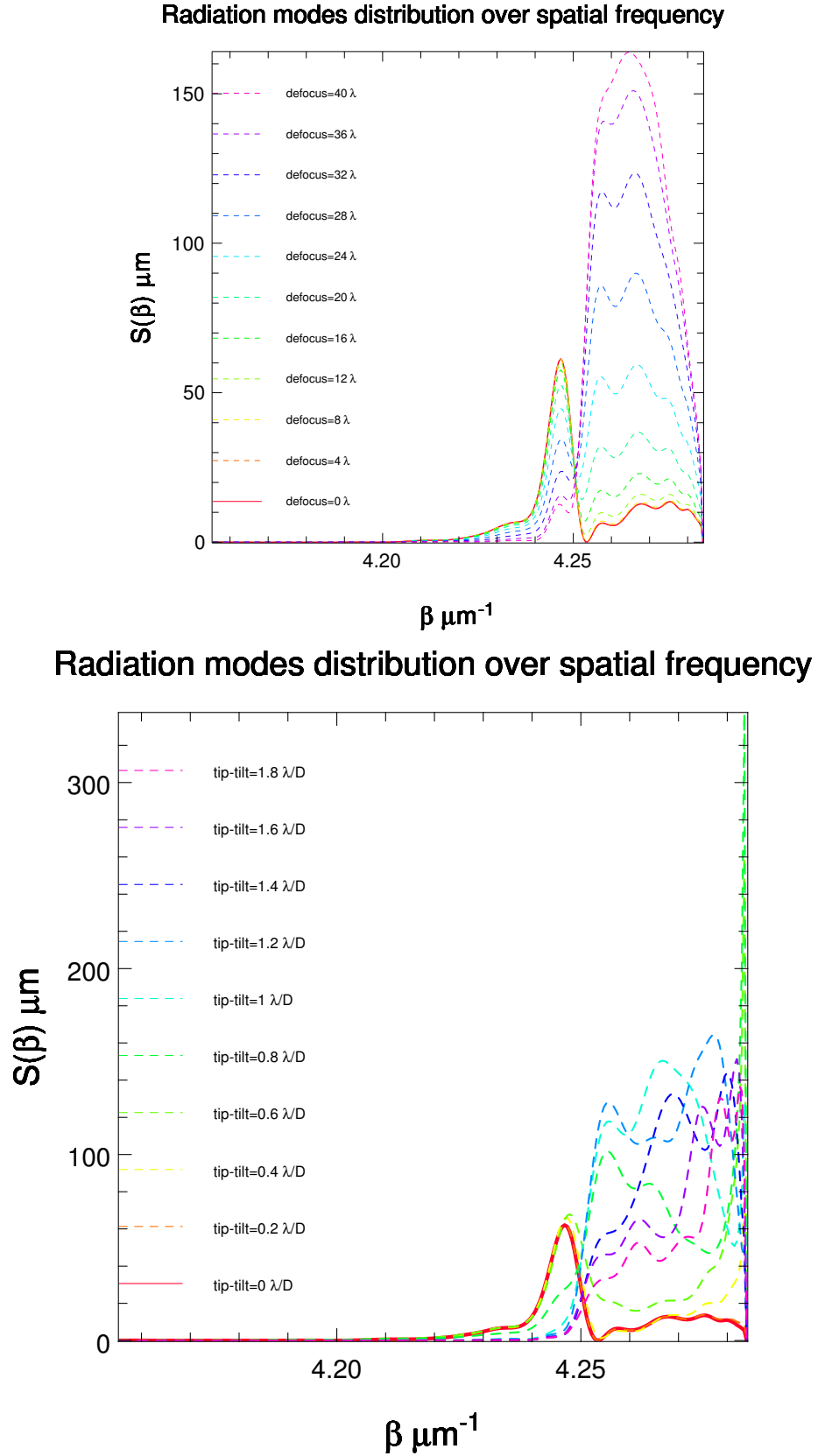


Fig. 3.12 – Distribution spectrale des modes rayonnés en fonction d'aberrations pupillaires. En haut : Fortes défocalisations. En bas : basculements de faible amplitude.

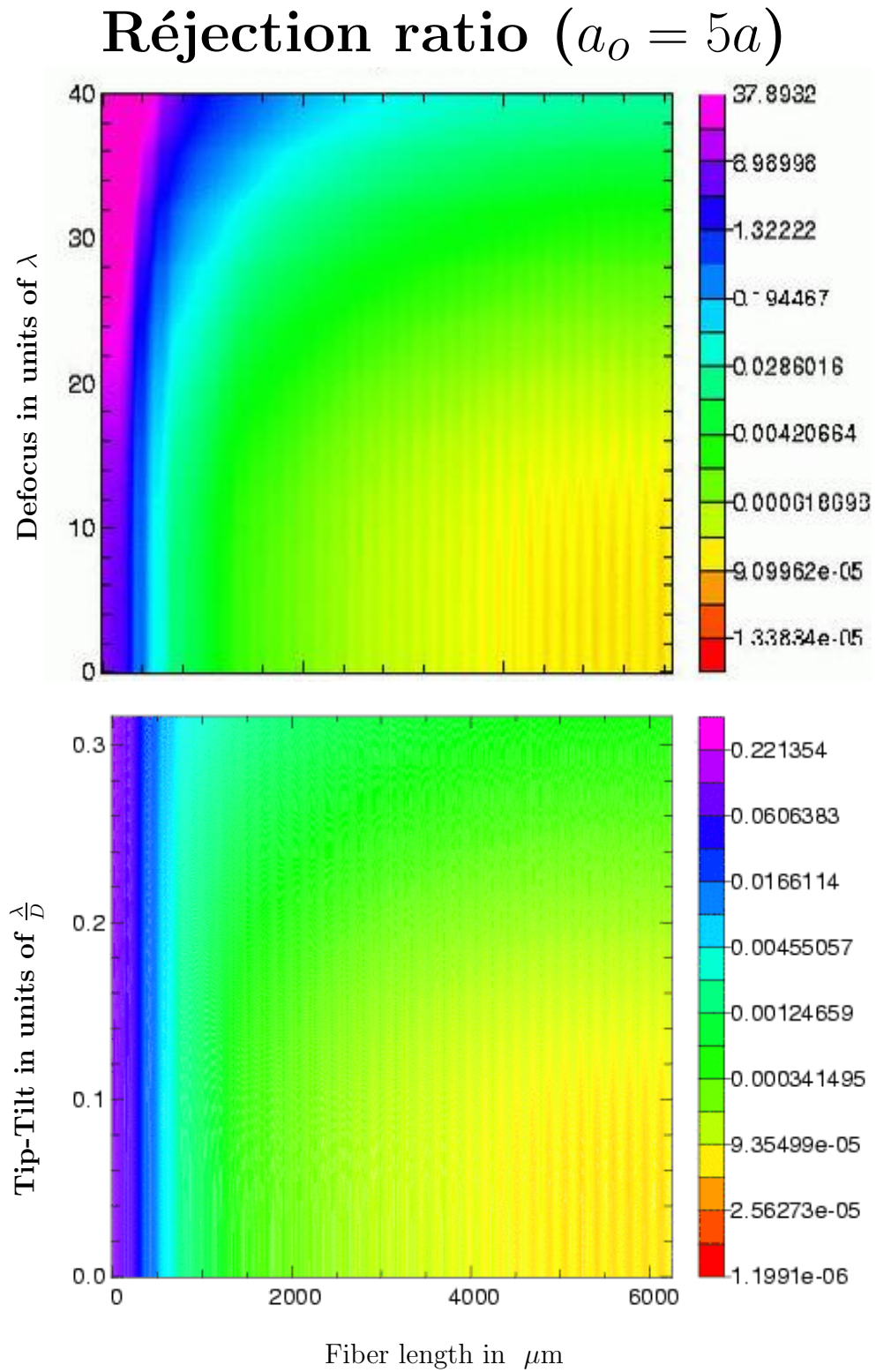


Fig. 3.13 – Chartes de contour du taux de réjection. En haut : défocalisation de forte amplitude. En bas : Tip-tilt d'amplitude modérée.

rayonnés par la fibre optique. L'analyse du couplage électromagnétique d'une tâche d'Airy idéale permet tout d'abord de préciser l'échelle dynamique du filtrage modal. Les courbes de réjection obtenues indiquent que la physique du filtrage modal opère sur de courtes distances. Typiquement quelques millimètres (6mm) de guide semble suffir pour obtenir un niveau de réjection des modes rayonnés 10^{-5} , à la longueur d'onde de $2.2 \mu\text{m}$ (AMBER).

Nous mettons en évidence toute l'importance du battement entre les modes rayonnés par la structure et le mode guidé, dans la problématique de la réjection. Ce battement constitue un frein à la réjection des modes rayonnés. Il correspond physiquement au résidu des modes rayonnés piégé dans le coeur par le mode fondamental. Il développe une puissance optique résiduelle qui vient s'ajouter interférentiellement (donc parfois se soustraire) à celle développée par le rayonnement seul. Le taux de réjection global est minimal dès lors que ces deux puissances sont du même ordre de grandeur en amplitude. Ces deux amplitudes variant en sens inverse l'une de l'autre dans le plan transverse de la fibre, il existe un rayon optimum pour lequel cet équilibre est réalisé à une distance de propagation donnée. On pourrait tirer profit de cette situation en intégrant le flux sur le champ de vue transverse correspondant. Toutefois l'optimum se déplace transversalement dans la gaine avec la propagation. Il serait intéressant de voir où il se situe après une longueur de fibre. Si l'on extrapole la loi de déplacement linéairement au distance de propagation ultérieure, on trouve un optimum de $20 \mu\text{m}$ au bout de 10cm de fibre.

Dans le cas d'un nulling interférométrique idéal le terme de battement disparaît, et la physique du taux de réjection coronographique est gouvernée par le taux de réjection des modes rayonnés seuls. Il n'y a plus de notion d'optimum pour le champ de vue d'intégration du flux stellaire du point de vue de la réjection : plus on réduit le champ de vue meilleure est la réjection. Pour un rayon de coeur le taux de réjection de 10^{-6} est obtenu à $2000 \mu\text{m}$. Il faudra cependant formuler des contraintes sur le battement induit par toute source de signal qui n'interfère pas destructivement dans le coronographe : signal de fuite, signal planétaire. Nous voyons que la réjection du signal rayonné, à un niveau élevé, fait intervenir des phénomènes électromagnétiques qui ne sont pas triviaux et avec lesquels il faudra compter ou non dans un contexte instrumental donné. Nous mettons en évidence aussi l'importance du spectre des modes rayonnés dans l'analyse du signal injecté sur la tête de fibre. La densité spectrale gouverne le profil de décroissance des taux de réjection dans la longueur. De ce point de vue nous identifions clairement qu'un taux de réjection défini par unité de longueur estimé par une pente locale ne peut être extrapolé aux distances de propagation ultérieures.

Ces premiers tests ouvrent la voie à une étude théorique nettement plus poussée de la physique du filtrage modal. Les tracés seront extrapolés ultérieurement à de plus grandes distances de propagation. L'espace des paramètres optogéométrique en particulier celui du paramètre de guidage du guide devrait être exploré, afin de mieux cerner son rôle dans la réjection. On pourra ensuite faire varier les conditions d'injection en perturbant la tâche d'Airy initiale. Les tests effectués dans ce sens avec une perturbation statique de la phase pupillaire, mettent en exergue une fois de plus la densité spectrale comme traceur de l'aberration. Les chartes de réjection simulées montrent clairement que les aberrations pupillaires, induisent du flux rayonné et dégradent la qualité de la réjection à une longueur de fibre donnée. Cette dégradation résulte d'une modification structurelle de la densité spectrale, en amplitude et en dispersion spectrale. Il faudrait faire une étude détaillée par type d'aberration, définir des priorités de contrôle par optique adaptative sur celles-ci, au sens de la densité spectrale et du taux de réjection. Il serait aussi extrêmement intéressant de coupler le propageur avec un spectre dynamique de turbulence atmosphérique, de fournir des cartes de réjection moyenne fonction

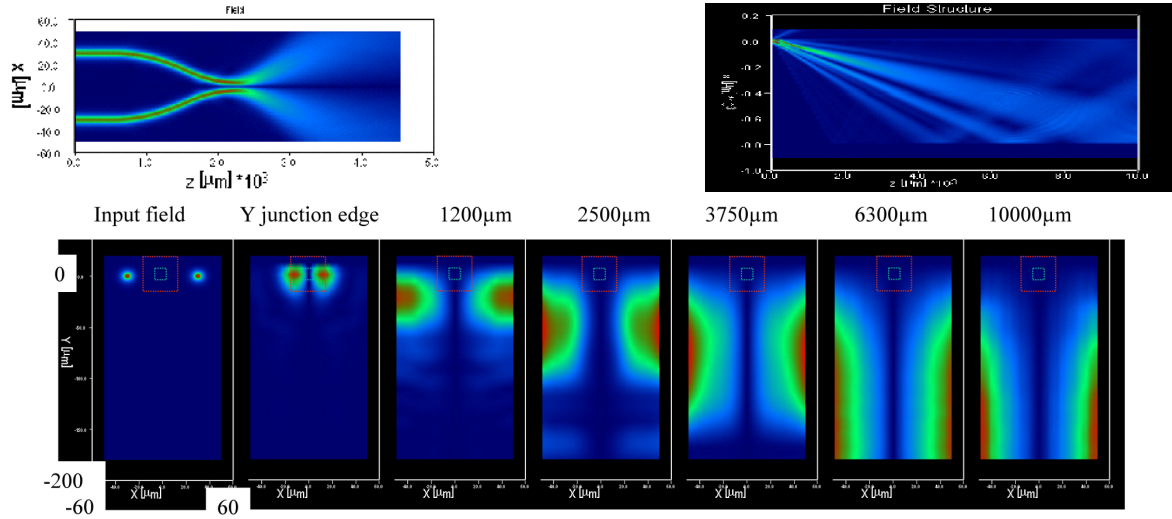


Fig. 3.14 – Simulations RSM d'une jonction Y dans la cadre de l'étude MAII qui montre les modes rayonnés (Schanen-Duport et al. 2002)

de la force de la turbulence et de la correction adaptative appliquée, cerner pour quelle variance de la phase atmosphérique on peut admettre que le profil de la densité spectrale évolue de façon quasi homothétique avec le rapport de Strehl et le degré de correction adaptative requis pour satisfaire une telle exigence.

Il serait intéressant aussi de comparer les résultats obtenus dans cette étude avec ceux obtenus indépendamment par I. Schanen-Duport à l'IMEP sur l'étude MAII de composant d'optique intégré pour une expérience de nulling. I. Schanen-Duport et collaborateurs ont simulé les modes rayonnés propagés au sein de leur composant par la méthode RSM (Radiation Spectral Method). Ces résultats sont présentés sur la figure 3.14. Je n'ai pas eu le temps de comparer ces 2 résultats de manière quantitative, car la géométrie choisie par MAII est beaucoup plus complexe que celle de mes guides droits. Ce n'était pas non plus le but de mes simulations. Cela permet sans doute de valider au moins mes résultats de manière qualitative, sachant que mon objectif était de mettre en place l'outil d'analyse du champ rayonné et de comprendre comment la longueur de réjection des fibres était contrainte.

Chapitre 4

Cohérence partielle

Sommaire

4.1	Qu'est -ce que la cohérence ?	96
4.2	Les représentations de l'onde lumineuse	97
4.2.1	Représentation harmonique	97
4.2.2	Représentation analytique et enveloppe complexe	98
4.2.3	Ondes aléatoires de puissance moyenne finie	98
4.3	Quantifier la cohérence	99
4.3.1	Fonction de cohérence mutuelle	99
4.3.2	Intensité et intensité mutuelle	100
4.3.3	Degrés de cohérence	100
4.4	Principes interférométriques	101
4.4.1	Théorème de Zernike Van-Cittert quasi-monochromatique	101
4.4.2	Imagerie par synthèse d'ouverture	106
4.4.3	Interférométrie Double-Fourier	108
4.5	Mesures interférométriques	110
4.5.1	Interférométrie par division d'onde	110
4.5.2	Les modes de recombinaison	112
4.5.3	Interférométrie plan-pupille et plan-image	112
4.5.4	Estimateurs de visibilité	114
4.6	Conclusion	115

Dans ce chapitre je commence par exposer les concepts clés de l'interférométrie. Ces concepts sont abordés sur un plan théorique. Il s'agit de bien cerner la notion cohérence spatio-temporelle d'une onde lumineuse, de sa quantification et de sa mesure par un procédé de recombinaison interférométrique. La partie réelle du degré de cohérence spatio-temporel est sans doute l'observable majeur de l'interférométrie. Il renseigne sur les propriétés spectrales et spatiales de la source observée (Théorème de zernike-Van-Cittert généralisé). J'explique à partir d'une mesure idéale du degré spatial de cohérence les principes de l'imagerie par synthèse d'ouverture et de l'interférométrie Double-Fourier, dans un premier temps. Dans un second temps, se pose la question de savoir comment le degré de cohérence est affecté par un interféromètre. La réponse n'est pas univoque car elle dépend du mode de recombinaison choisi. Je commence donc une description succincte des modes de recombinaison existant, coaxial,

multiaxial, multimode, monomode. AMBER le recombineur afocal du VLTI est un recombineur multiaxial. Je présente de manière plus détaillée le cas d'une recombinaison multiaxiale des faisceaux dans le plan image (mode Fizeau-ou Michelson), en multimode, dans le cas classique d'une recombinaison multimode, de manière à bien cerner les différences avec le cas d'une recombinaison monomode des faisceaux qui fera l'objet du dernier chapitre de cette thèse.

4.1 Qu'est -ce que la cohérence ?

Dans cette section, nous introduisons les notions ainsi que le formalisme nécessaires à l'établissement et à la compréhension de la théorie de la cohérence partielle d'une onde émise par une source de lumière dite "naturelle"¹, et des phénomènes d'interférences qui s'y rapportent. J'invite le lecteur rompu à ces deux disciplines à passer directement aux spécificités de l'optique guidée présentés dans le chapitre suivant.

La lumière naturelle est par définition non polarisée, et il est largement suffisant avec une telle hypothèse de la traiter comme un champ scalaire de l'espace et du temps à valeur réelle pour rendre compte de façon exhaustive de ses propriétés de cohérence partielle. La cohérence partielle dans l'espace et dans le temps d'une onde lumineuse étant par nature intimement liée à son caractère multi-longueur d'ondes², nous commençons dans un premier temps par présenter l'appareil mathématique indispensable à la description d'un champ polychromatique : analyse spectrale de Fourier, représentation analytique ou enveloppes complexes d'un rayonnement quasi-monochromatique. Les techniques d'analyse harmonique sont progressivement étendues aux classes des distributions, des fonctions et des processus aléatoires stationnaires et ergodiques du temps, d'énergie non strictement sommable mais de puissance moyenne bien définie sur une échelle de temps grande devant le temps de cohérence de l'onde aléatoire considérée. Ceci aboutit à la notion d'une intensité de champ lumineux stationnaire sur l'échelle de temps considérée.

Dans un second temps, nous analysons l'aptitude de l'onde lumineuse, toujours traitée comme un processus aléatoire stationnaire et ergodique du temps, à garder un certain degré de corrélation ("à rester cohérente") en divers points de l'espace et du temps. À ce titre, les quantificateurs usuels de la cohérence spatio-temporelle de l'onde sont alors exposés. Il n'est pas surprenant de voir que les fonctions de cohérence mutuelle "à deux points" dans l'espace et dans le temps, normalisées ou non, généralisent la notion d'intensité lumineuse et jouent de ce point de vue un rôle majeur dans l'établissement de la théorie générale. La connection avec une représentation spectrale de la cohérence (densité spectrale mutuelle de puissance) est établie. Le cas particulier et important d'un rayonnement quasi-monochromatique, pour lequel les quantificateurs de cohérence revêtent des formes séparables de l'espace et du temps (pureté cross-spectrale) est également discuté.

Dans un troisième temps, nous citons comme première application de la théorie générale, le théorème fondamental de l'interférométrie stellaire longue base à savoir celui de Zernike Van-Cittert. Ce théorème, tout d'abord livré dans une version quasi-monochromatique, permet de faire le lien entre le degré de cohérence spatiale de l'onde sur le plan de la pupille d'entrée d'un interféromètre stellaire et la distribution spatiale de brillance de l'objet observé. Dans ce contexte, nous appliquons le théorème à un disque stellaire uniforme. Une généralisation du théorème au cas d'un rayonnement polychromatique plus général est ensuite donnée et illustrée sur un disque de brillance uniforme et spectralement distribué selon une loi de Corps Noir.

Enfin dans une dernière partie nous rappelons, à la lumière du théorème de Zernike-Van Cittert, pourquoi le degré de cohérence spatio-temporel de l'onde apparaît comme l'observable normalisé

¹La nature vectorielle de la radiation électromagnétique est volontairement ignorée dans le traitement de la cohérence partielle standard présenté dans ma thèse, par souci de simplicité uniquement. Néanmoins, il est toujours possible d'adapter la théorie à la nature vectorielle de l'onde par un traitement matriciel de la cohérence entre chaque composante du champ électromagnétique.

²Une onde monochromatique pure est un cas décalé irréalisable en pratique et totalement cohérente à la fois au sens spatial et temporel du terme.

majeure de l'interférométrie longue base et en quoi cette dernière permet de combiner à la fois information spectrale et spatiale sur la source étudiée. Conformément à la théorie classique des interférences produite par des champs optiques stationnaires, nous présentons la recombinaison interférométrique comme le dispositif expérimental de base permettant de mesurer le degré de cohérence de l'onde sur le plan de la pupille d'entrée de l'interféromètre. Cependant nous insistons sur le fait que la dérivation de l'équation interférométrique aussi bien que son interprétation classiques sont réductrices. La physique sous-jacente peut-être radicalement différente d'un mode de recombinaison interférométrique à un autre, et selon la technique employée il faut toujours s'interroger sur la nature de la relation existant entre le degré de cohérence mesuré à partir de l'expérience sur le plan de la détection et le degré de cohérence effectif de l'onde sur la pupille d'entrée de l'interféromètre. Nous montrons qu'une divergence possible entre ces deux grandeurs peut exister. Nous étayons notre argumentation sur la base de l'exemple connu d'une recombinaison multiaxiale de faisceaux opérée en espace libre.

4.2 Les représentations de l'onde lumineuse

4.2.1 Représentation harmonique

Nous décrivons l'espace-temps dans un système de coordonnées relativistes, constitué des coordonnées spatiales usuelles, tandis que l'écoulement du temps sera mesuré en unité de longueur via le changement de coordonnées³ $x = ct$. Soit une onde scalaire à valeur réelle, de carré sommable dans l'espace et dans le temps. Conformément au principe de décomposition spectrale issu de l'analyse de FOURIER, cette onde peut être à chaque instant vue comme une superposition continue d'ondes monochromatiques pures,

$$\begin{aligned} E(P, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(P, \sigma) \exp(-2i\pi\sigma x) d\sigma \\ e(P, \sigma) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(P, x) \exp(2i\pi\sigma x) dx \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ est le nombre d'onde associé à chaque harmonique. De la réalité du signal considéré nous obtenons une relation d'hermiticité sur chacune de ses composantes spectrales,

$$e(P, -\sigma) = e^*(P, \sigma) \quad (4.2)$$

Et le théorème bien connu de Parseval exprimant la conservation isométrique de l'énergie contenue dans le signal lors du passage du domaine temporel au domaine spectral s'écrit sous la forme,

$$2 \int_0^{+\infty} |e(P, \sigma)|^2 d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(P, x) dx < \infty \quad (4.3)$$

La *densité spectrale d'énergie* du signal, homogène à une énergie par unité de fréquence optique, découle naturellement de cette loi de conservation énergétique via la relation,

$$\epsilon(\sigma) = |e(P, \sigma)|^2 \quad (4.4)$$

Il est sous-entendu que les techniques de décomposition harmonique peuvent être généralisées par passage à la limite à la classe des distributions et que dans ce cas l'égalité de Parseval doit être entendue au sens faible, i.e. dans un sens non nécessairement borné supérieurement.

³le temps de cohérence caractéristique d'une radiation sera ainsi identifiée à la longueur de cohérence associée.

4.2.2 Représentation analytique et enveloppe complexe

La représentation d'une onde scalaire comme celle donnée dans l'équation Eq. (4.1) par une grandeur complexe de partie réelle identique, est classiquement obtenue de la façon suivante,

$$\begin{aligned} V(P, x) &= 2 \int_0^{+\infty} e(P, \sigma) \exp(-2i\pi\sigma x) d\sigma \\ V(P, x) &= V^{(r)}(P, x) + iV^{(i)}(P, x) \\ V^{(r)}(P, x) &= E(P, x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Cette représentation dite “analytique” ou complexe du signal réel ne contient que les composantes spectrales de fréquences positives du signal réel. A ce titre, elle vérifie certaines propriétés mathématiques. En particulier parties réelles et imaginaires sont transformées de Hilbert l'une de l'autre, au sens de la partie principale de Cauchy,

$$\begin{aligned} V^{(r)}(P, x) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{V^{(i)}(P, x')}{x' - x} dx' \\ V^{(i)}(P, x) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{V^{(r)}(P, x')}{x' - x} dx' \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'égalité de Parseval s'obtient en termes de représentation analytique sous la forme,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V^{(r)}(P, x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} V^{(i)}(P, x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(P, x)|^2 dx \quad (4.7)$$

Lorsque le rayonnement est distribué autour d'un certain nombre d'onde central $\bar{\sigma}$, sur une certaine largeur spectrale $\delta\sigma$ la représentation analytique est factorisable en une composante basse fréquence (l'enveloppe complexe du signal) faiblement dépendante du temps, et une harmonique pure oscillant au nombre d'onde central,

$$V(P, x) = \psi(P, x) \exp(-2i\pi\bar{\sigma}x) \quad (4.8)$$

Lorsque la radiation est quasi-monochromatique, $\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}} \ll 1$ l'enveloppe complexe devient insensible au temps x et généralise la notion d'amplitude complexe monochromatique pure. En supposant en première approximation le spectre de la radiation constant sur la largeur spectrale considérée, l'enveloppe complexe quasi-monochromatique s'écrit,

$$\psi(P, x) = e(P, \bar{\sigma}) \delta\sigma \operatorname{sinc}(\delta\sigma x) \quad (4.9)$$

et varie peu sur l'échelle temporelle mesurée par le *temps de cohérence* $l_c = \frac{1}{\delta\sigma} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}$. On retrouve, bien entendu, à la limite d'une largeur spectrale trivialement nulle,

$$\lim_{\delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\psi(P, x)}{\delta\sigma} = e(P, \bar{\sigma}) \quad (4.10)$$

4.2.3 Ondes aléatoires de puissance moyenne finie

En pratique, les ondes lumineuses sont intégrées sur un intervalle de temps fini $[-X, +X]$. Emanant d'une source de lumière naturelle non polarisée, et d'origine thermique, elles ont une durée de vie limitée, “un temps de cohérence temporelle” inversement proportionnel à la largeur spectrale de la source en question. Sur une échelle de temps d'intégration X , large devant ce temps de cohérence l_c , on peut les appréhender dans un sens statistique, c'est à dire comme les réalisations possibles

d'un processus aléatoire supposé ergodique et stationnaire du temps. En raisonnant sur une échelle de temps suffisamment longue devant le temps de cohérence il est alors possible de donner corps à la notion de puissance optique moyenne, c'est à dire au concept d'une intensité lumineuse stationnaire indépendante du temps, en procédant idéalement à la limite,

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} V^{(r)}(P, x)^2 dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \frac{1}{2} \int_{-X}^{+X} |V(P, x)|^2 dx \quad (4.11)$$

Pour un processus aléatoire stationnaire et ergodique cette moyenne temporelle doit tendre vers une valeur finie indépendante du temps et par ergodicité correspondre à la moyenne obtenue sur un ensemble de réalisations de l'onde indépendantes, $\langle |V^{(r)}(P, x)|^2 \rangle$. Toute réalisation vérifiant la relation précédente ne peut être à l'évidence de carré sommable. En revanche la restriction de cette réalisation à l'intervalle d'intégration notée $V_X^{(r)}(P, x)$ l'est, et à ce titre peut être représentée harmoniquement. En désignant ainsi sa densité spectrale d'énergie par $\epsilon_X(P, \sigma)$, et en moyennant la relation précédente sur l'ensemble de toutes les réalisations, nous obtenons le pendant de l'équation de Parseval en termes de puissance moyenne,

$$\langle V^{(r)}(P, x)^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |V(P, x)|^2 \rangle = 2 \int_0^\infty \mathcal{G}(P, \sigma) d\sigma \quad (4.12)$$

ou nous avons introduit naturellement la densité spectrale puissance du processus aléatoire analytique $V(P, x)$ comme la grandeur convergente,

$$\mathcal{G}(P, \sigma) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle \epsilon(P, \sigma) \rangle}{2X} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle |e(P, \sigma)|^2 \rangle}{2X} \quad (4.13)$$

4.3 Quantifier la cohérence

4.3.1 Fonction de cohérence mutuelle

Dès lors que l'on décrit l'onde lumineuse comme un processus aléatoire stationnaire du temps (mais non nécessairement homogène dans l'espace), représenté analytiquement, il devient naturel de caractériser la cohérence spatio-temporelle d'une radiation lumineuse par la fonction de corrélation statistique à deux points dans l'espace et dans le temps,

$$\Gamma_{12}(x) = \langle V(P_1, x' + x) V^*(P_2, x') \rangle \quad (4.14)$$

Cette fonction de cohérence mutuelle est reliée à la densité spectrale de puissance mutuelle entre les radiations aux points P_1 et P_2 par la relation,

$$\Gamma_{12}(x) = 4 \int_0^\infty \mathcal{G}_{12}(\sigma) \exp(-2i\pi\sigma x) d\sigma \quad (4.15)$$

la densité spectrale mutuelle de puissance est une généralisation à deux points de l'espace de la densité spectrale de puissance rencontrée dans la section précédente,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{12}(x) &= \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle e_X(P_1, \sigma) e_X^*(P_2, \sigma) \rangle}{2X} \\ \mathcal{G}_{12}(-\sigma) &= \mathcal{G}_{12}^*(\sigma) = \mathcal{G}_{21}(\sigma) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sur la base de la relation générale existant entre un champ à valeurs réelles et sa représentation analytique, la fonction de cohérence mutuelle complexe est elle-même la représentation analytique

d'une fonction de cohérence réelle. D'après l'équation Eq. (4.15) celle-ci s'identifie à,

$$\Gamma_{12}^{(r)}(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{12}(\sigma) \exp(-2i\pi\sigma x) d\sigma \quad (4.17)$$

Parallèlement, on montre facilement que la partie réelle de la fonction de cohérence complexe vaut le double de la fonction de cohérence spatio-temporelle du champ électromagnétique réel,

$$\langle V^{(r)}(P_1, x' + x) V^{(r)}(P_2, x') \rangle = \frac{1}{2} \Gamma_{12}^{(r)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{12}(\sigma) \exp(-2i\pi\sigma x) d\sigma \quad (4.18)$$

si bien que l'on parvient à la conclusion que *la densité spectrale de puissance mutuelle forme une paire de Fourier avec la fonction de cohérence spatio-temporelle de l'onde réelle*. Ceci est une généralisation du théorème de Wiener-Khinchine, que l'on retrouve en considérant la relation au même point de l'espace.

4.3.2 Intensité et intensité mutuelle

La valeur à l'origine de la fonction de cohérence est *l'intensité mutuelle* complexe de l'onde entre les 2 points considérés,

$$J_{12} = \Gamma_{12}(0) \quad (4.19)$$

Pour une onde quasi-monochromatique oscillant en a la fréquence centrale $\bar{\sigma}$ sur une largeur spectrale caractéristique $\delta\sigma$ telle que, $\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}} \ll 1$, la fonction de cohérence mutuelle de l'onde est séparable par rapport aux variables d'espace et de temps, on dit alors que le rayonnement est approximativement cross-spectralement pur,

$$\Gamma_{12}(x) \simeq J_{12} \exp(-2i\pi\bar{\sigma}x) \quad (4.20)$$

L'intensité lumineuse se définit naturellement comme étant l'intensité mutuelle considérée en un seul point de l'espace,

$$I_1 = J_{11} = \Gamma_{11}(0) \quad (4.21)$$

4.3.3 Degrés de cohérence

On préfère souvent utiliser une forme normalisée de la fonction de cohérence spatio-temporelle, le degré complexe de cohérence spatio-temporel défini par,

$$\gamma_{12}(x) = \frac{\Gamma_{12}(x)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(x)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (4.22)$$

c'est à dire la fonction de cohérence mutuelle normalisée par la moyenne géométrique des intensités lumineuses produites aux points P_1 et P_2 . Le degré de cohérence complexe de cohérence spatio-temporel d'une onde parcourt le disque unité du plan complexe. Sur le cercle frontière, il caractérise un rayonnement spatio-temporellement cohérent.

Le degré de cohérence complexe est la représentation analytique du degré de cohérence de l'onde réelle défini par, ‘

$$\gamma_{12}^{(r)}(x) = \frac{\Gamma_{12}^{(r)}(x)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (4.23)$$

La valeur à l'origine du degré complexe de cohérence est *le degré de cohérence spatial* de l'onde,

$$\mu_{12} = \gamma_{12}(0) = \frac{J_{12}}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (4.24)$$

Pour une onde quasi-monochromatique oscillant à la fréquence centrale $\bar{\sigma}$ la pureté cross-spectrale s'exprime par le fait que le degré complexe de cohérence spatio-temporelle est factorisable en un degré de cohérence spatial et un degré de cohérence purement temporel, indépendant du couple de points considérés,

$$\gamma_{12}(x) \simeq \mu_{12} \gamma(x) \quad \text{avec } \gamma(x) = \exp(-2i\pi\bar{\sigma}x) \quad (4.25)$$

Le degré de cohérence temporelle est de module unité exprimant qu'une onde quasi-monochromatique est toujours temporellement cohérente. Une onde monochromatique pure, cas d'école physiquement irréalisable en pratique, est une idéalisation mathématique d'une onde à la fois cohérente au sens spatial ($|\mu_{12}| = 1$) et temporel du terme. On voit donc qu'il faut absolument considérer une certaine largeur spectrale non trivialement nulle pour pouvoir parler stricto sensu de rayonnement partiellement cohérent. C'est donc dans le cadre conceptuel de la cohérence partielle d'un rayonnement polychromatique ou quasi-monochromatique que le théorème de Zernike Van-Cittert, que d'aucun considère comme le théorème fondamental majeur de l'interférométrie stellaire, peut être établi.

4.4 Principes interférométriques

4.4.1 Théorème de Zernike Van-Cittert quasi-monochromatique

Le théorème de Zernike Van-Cittert permet de déterminer le degré complexe de cohérence spatio-temporel du rayonnement quasi-monochromatique émis au loin d'une source lumineuse spatialement incohérente. Nous énoncerons directement le théorème en substance sans en donner explicitement la démonstration qui figure dans de nombreuses références Born & Wolf [10], et l'adapterons d'un point de vue terminologique au contexte de l'observation astronomique.

Au loin d'une source quasi-monochromatique spatialement incohérente, le degré de cohérence complexe μ_{12} de la radiation entre deux points P_1 et P_2 d'un plan illuminé par cette dernière, est égal à la transformée de Fourier normalisée de la distribution spatiale de brillance de la source B).

On peut montrer que l'intensité mutuelle s'écrit,

$$J_{12} = \exp(2i\pi\bar{\sigma}\delta_{12})\delta\sigma \int B(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\sigma}) \exp(-2i\pi\sigma\mathbf{b}_{12}.\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (4.26)$$

et le degré de cohérence spatial apparaît sous la forme normalisée,

$$\mu_{12}(\bar{\sigma}) = \exp(2i\pi\bar{\sigma}\delta_{12}) \frac{\int B(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\sigma}) \exp(-2i\pi\bar{\sigma}\mathbf{b}_{12}.\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}}{\int B(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\sigma}) d\boldsymbol{\alpha}} \quad (4.27)$$

La source est caractérisée par une distribution spatio-spectrale de brillance d'intensité spécifique $B(\boldsymbol{\alpha}, \sigma)$. Les coordonnées angulaires $\boldsymbol{\alpha}$ sont définies dans un plan tangent à la sphère céleste au point de référence⁴ pointé par les antennes de l'interféromètre. Celles-ci sont matérialisées par les points P_1 et P_2 sur le plan d'analyse de la cohérence spatiale. \mathbf{b}_{12} est la ligne de base de l'interféromètre projetée sur le ciel. $\bar{\sigma}\mathbf{b}_{12}$ est la fréquence spatiale analysée par la base de l'interféromètre. Cette fréquence spatiale a pour coordonnées (\bar{u}, \bar{v}) sur le plan d'analyse de la cohérence, le plan de projection des lignes de bases sur le ciel encore nommé plan des fréquences spatiales ou "plan (u,v)". δ_{12} est la différence de marche optique menant du point de référence défini sur la source aux deux antennes.

⁴Le "phase tracking center" de la radio-interférométrie.

Le rayonnement étant supposé quasi-monochromatique, la fonction de cohérence mutuelle est donnée par l'équation Eq. (4.20). Quant au degré de cohérence spatio-temporelle, il est donné par la formule Eq. (4.25).

Le théorème de Zernike-Van Cittert possède certaines limitations. Tout d'abord, il ne s'applique qu'aux sources spatialement incohérentes. Cependant la grande majorité des objets stellaires obéissent à ce critère⁵. D'autre part la dérivation mathématique du théorème nécessite certaines hypothèses qui en restreignent la portée.

L'interprétation *directe* du degré de cohérence comme paire de Fourier de la brillance spécifique de l'objet observé ne peut-être valide que si la cohérence est analysée dans une plan situé "au loin" de la source. Pour ce faire on doit pouvoir négliger la différence de chemin optique δ_{12} entre le phase tracking center et chacun des points de la ligne de base. Dans ces conditions seulement, le front d'onde émanant de la source située grande distance pourra être considéré comme plan à l'échelle spatiale de la base interférométrique. Cette condition n'est remplie qu'au delà d'une certaine distance critique R_∞ séparant le point de référence de phase à la ligne de base. On arrive facilement à la conclusion que cette distance a pour expression $R_\infty = \bar{\sigma} b_{12}^2$. La contrainte est relaxée lorsque l'on augmente la longueur d'onde d'observation et diminue la base de l'interféromètre.

La figure Fig.4.1 présente cette distance critique en fonction du nombre d'onde et pour diverses lignes de base projetées sur le ciel (lignes obliques). On a positionné dans cet espace quelques interféromètres optiques actuellement en fonctionnement, à partir de leurs caractéristiques instrumentales (bases extrémales et bande passante spectrale). Une source cosmique est située dans le champ lointain de l'interféromètre si la distance R la séparant de l'instrument vérifie $R > R_\infty$. Sur la base de ce critère on peut définir à longueur d'onde donnée un champ lointain absolu pour l'instrument (régions pleines) dans lequel le critère est satisfait pour toutes les lignes de base de l'interféromètre. Sur la plage des bases utilisables par l'instrument cette notion est relative, puisque elle dépend effectivement de la base utilisée (zone hachurée). Enfin tout objet moins éloigné que la distance critique obtenue pour la ligne de base la plus courte est par opposition situé dans le champ proche absolu de l'instrument. Dans cette zone laissée vide le critère n'est vérifié pour aucune base de l'interféromètre. Nous considérerons que l'interprétation directe du degré de cohérence spatial comme paire de Fourier de la distribution de brillance n'est strictement valide que dans le champ lointain de l'interféromètre. La distance caractérisant ce champ lointain est typiquement comprise dans l'intervalle [1 – 10] AU. Nous retiendrons que seuls les objets appartenant au système solaire échappent au théorème de Zernike-Van-Cittert et que pour ces derniers il faut tenir compte de la différence de marche δ_{12} dans les expressions Eq. (4.26) et Eq. (4.27). Le degré de cohérence spatial normalisé de la source μ_{12} est appelé visibilité complexe de l'objet observé (à une fréquence spatiale donnée). On entend souvent par visibilité son module et par phase de l'objet son argument.

Sous cette forme, le théorème s'applique à une radiation dite quasi-monochromatique. Cette propriété suppose que la résolution spectrale équivalente du rayonnement est importante (contenu spectral de la source faiblement dispersé autour du nombre d'onde central) $R_\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\delta\sigma} \gg 1$. D'autre part, il requiert que la différence de chemin optique menant d'un point donné de la source à chaque antenne collectrice, i.e. $\delta_{12} + \alpha \cdot \mathbf{b}_{12}$ dans l'approximation paraxiale de la propagation, est inférieure à la longueur de cohérence de la radiation $l_c = \frac{1}{\delta\sigma}$. Pour un objet situé dans le champ lointain de l'interféromètre $\delta_{12} \simeq 0$ et la seconde condition s'exprime par l'inégalité, $\alpha \cdot \mathbf{b}_{12} < \frac{1}{\delta\sigma}$. En d'autres termes, la radiation émise par un point de la source ne répondant pas à cette inégalité, sera spatialement incohérente entre

⁵Font exception quelques pulsars observés dans le domaine radio.

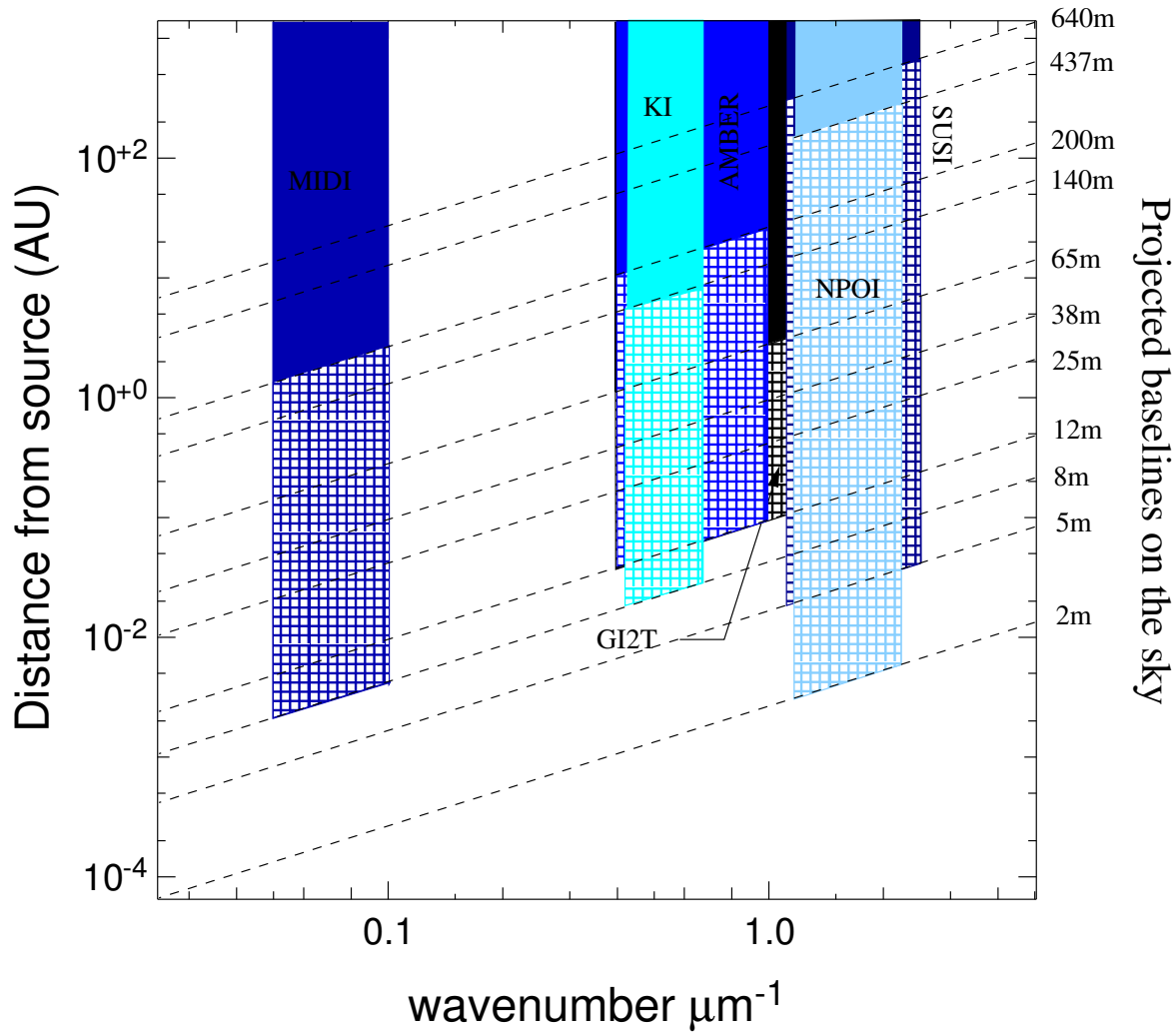


Fig. 4.1 – Champ lointain d'un interféromètre. Zone pleine : champ lointain absolu pour toutes les lignes de base de l'interféromètre. Zone hachurée champ lointain de l'interféromètre relatif à la base utilisée.

les points P_1 et P_2 et ne participe donc pas à la construction interférentielle de la cohérence spatiale sur le plan d'observation⁶. Par conséquent, seule une portion effective du champ de vue angulaire physique de la source va participer constructivement à l'établissement de la cohérence spatiale sur la pupille d'entrée de l'interféromètre. Cette portion effective constitue *le champ de vue d'imagerie interférométrique*.

$$\Omega_i = R_\sigma \frac{1}{\bar{\sigma} b_{12}} \quad (4.28)$$

C'est simplement le produit entre la résolution spectrale équivalente du rayonnement émis par la source par la fréquence spatiale analysée par l'interféromètre. La relation de Fourier intervenant dans le théorème de Zernike-Van-Cittert, peut donc être limitée spatialement au champ de vue d'imagerie interférométrique. La définition du champ de vue interférométrique basée uniquement sur la résolution spectrale équivalente de la source peut-être appelé champ de vue interférométrique no-

⁶L'incohérence spatiale constatée sur le plan d'analyse à un temps donné est une manifestation retardée d'une incohérence de nature temporelle sur le plan d'émission.

minal. Cette notion de champ interférométrique est évidemment transposable après la propagation quasi-monochromatique des faisceaux dans l'espace et au sein de l'interféromètre, i.e dans tout milieu altérant la distribution spectrale du rayonnement. Ainsi le champ de vue interférométrique effectif n'est plus limité par la résolution spectrale équivalente de la source mais par celle de la source vue à travers le milieu interstellaire et l'instrument, fonction du transfert radiatif et de l'opacité au sein du milieu interstellaire ainsi de la bande spectrale aux filtres optiques utilisés dans le design interférométrique. Aussi est-il toujours possible d'augmenter significativement le champ de vue interférométrique effectif, en travaillant à moyenne ou très haute résolution spectrale. Le champ de vue effectif dépend aussi du mode de recombinaison choisi. Dans un codage multiaxial -plan image, en mode Michelson, c'est la différence entre la ligne de base externe et la ligne de base servant au codage spatial des franges d'interférences qui inetrviennent dans la définition du champ de vue (Tallon & Tallon-Bosc [103]).

Pour bien cerner les notions de visibilité complexe, et de vue champ interférométrique nous illustrerons ces dernières à l'aide un disque de brillance uniforme et spectralement distribué selon une loi de corps noir. Ce modèle simplifié peut par exemple représenter une étoile dont la photosphère est circulaire, de diamètre apparent θ , et de température effective T . Le corps noir se caractérise par une intensité spécifique exprimée par unité d'angle solide et de nombre d'onde, distribuée selon la loi de Planck,

$$B_\sigma(T) = 2hc^2\sigma^3 \frac{1}{\exp(\frac{hc\sigma}{kT}) - 1} \quad (4.29)$$

$$B(T) = \int_0^\infty B_\sigma(T) d\sigma = \sigma_{SB} T^4$$

k et h étant respectivement les constantes de Boltzmann et de Planck. $\sigma_{SB} = F_3 \frac{2k^4}{c^2 h^3}$ étant la constante de Stefan-Boltzmann et F_n désignant l'intégrale d'ordre n $F_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{\exp(x)-1} dx$. Le moment d'ordre (n) de la distribution de Planck sont calculables sous la forme,

$$\bar{\sigma}^n = \frac{1}{B(T)} \int_0^\infty \sigma^n B_\sigma(T) d\sigma = \frac{F_{n+3}}{F_n} \left(\frac{kT}{hc}\right)^n \quad (4.30)$$

En particulier le moment du premier ordre est donné par,

$$\left(\frac{\bar{\sigma}}{\mu m^{-1}}\right) = 2.54172 \cdot 10^{-4} \left(\frac{T}{K}\right) \quad (4.31)$$

La formule générale du moment permet d'évaluer la résolution spectrale équivalente du rayonnement,

$$R_\sigma = \left(\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2} - 1\right)^{-1/2} = \frac{(F_3 F_5)}{(F_4)^2} - 1)^{-1/2} = (0.28008)^{-1/2} = 1.89 \quad (4.32)$$

La résolution spectrale équivalente du corps noir est indépendante de sa température d'équilibre thermique. Le champ interféromtrique associé au corps noir, est donc à la longueur d'onde centrale du rayonnement, selon Eq. (4.28),

$$\left(\frac{\Omega_i(T)}{\text{mas}}\right) = \frac{1.534 \cdot 10^6}{\left(\frac{T}{K}\right) \left(\frac{b_{12}}{\text{m}}\right)} \quad (4.33)$$

Il est représenté pour diverses valeurs de températures effectives et diverses lignes de base sur la figure Fig.4.2. En accord avec l'hypothèse de séparabilité des propriétés spatiales et spectrales de la source, on dérive la distribution de brillance rayonnée sur le demi-espace environnant par le disque sous la forme,

$$B(\alpha, \sigma) = 2\pi B_\sigma(T) I(\alpha) \quad (4.34)$$

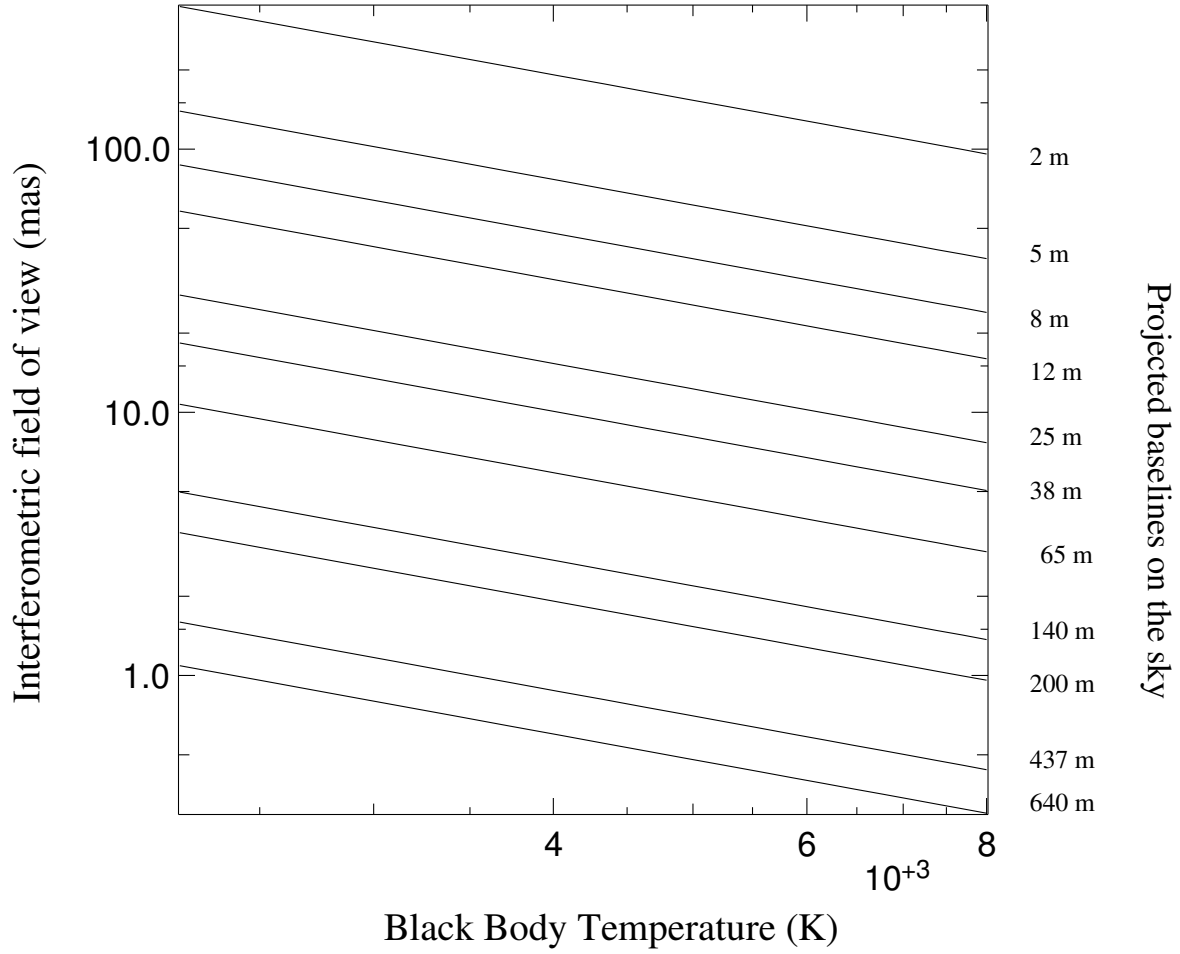


Fig. 4.2 – Champ de vue interférométrique du Corps Noir en fonction de sa température effective pour diverses lignes de base projetées sur le ciel de l'interféromètre.

où $I(\alpha)$ décrit la partie purement spatiale de la distribution de brillance dont l'intégrale sur le plan du disque a été normalisée à l'unité,

$$I(\alpha) = \frac{4}{\pi\theta^2} \Pi\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) \int 2\pi\alpha^2 I(\alpha) d\alpha = 1 \quad (4.35)$$

Π étant la fonction indicatrice du disque de diamètre unité. Le degré de cohérence spatial de la radiation mesuré sur le plan de la source,

$$\mu_{12} = 2 \frac{J_1(\pi\theta\bar{\sigma}b_{12})}{\pi\theta\bar{\sigma}b_{12}} \quad (4.36)$$

Le degré de cohérence spatial du disque uniforme est présenté en module et en phase sur la figure Fig.4.3 en fonction de la fréquence spatiale $\bar{\sigma}b_{12}$ exprimée en cycles par seconde d'arc. La symétrie centrale de la distribution spatiale de brillance conduit à un degré de cohérence à valeurs réelles. La phase définie à 2π près suit les alternances de signe du degré de cohérence par sauts d'amplitude π radians.

Disk of uniform brightness

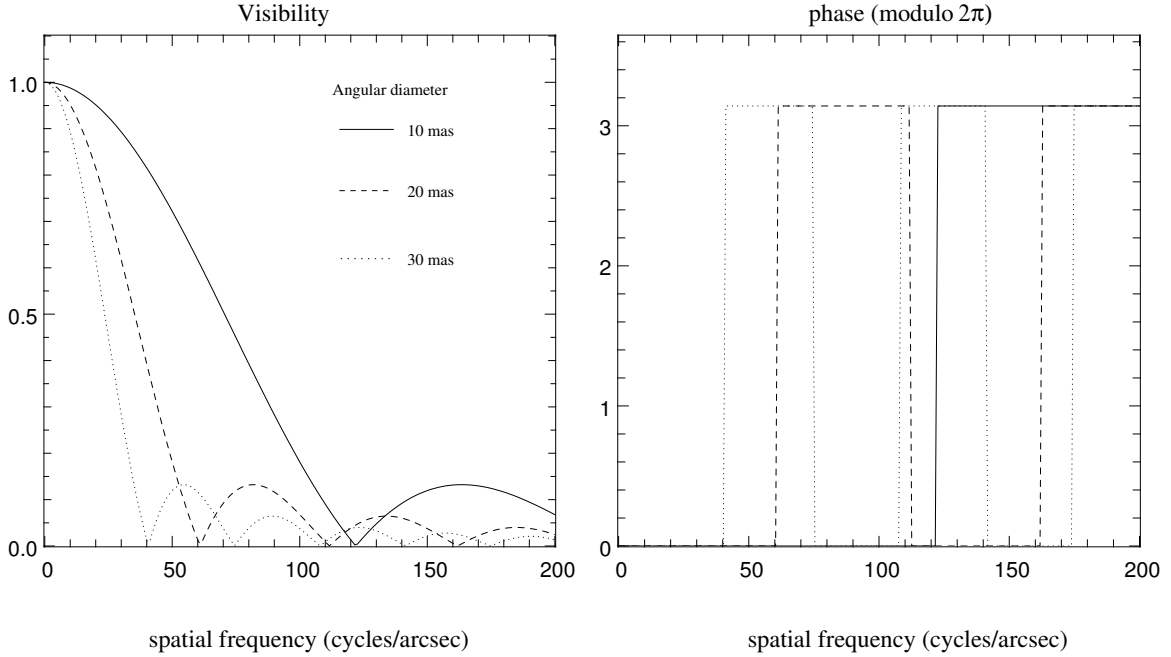


Fig. 4.3 – Visibilité complexe μ_{12} d'un disque circulaire de brillance uniforme en module (figure de gauche) et en phase (figure de droite).

4.4.2 Imagerie par synthèse d'ouverture

L'imagerie interférométrique à haute résolution spectrale, repose sur un emploi intensif du théorème de Zernike-van-Cittert dans sa version quasi-monochromatique. Dans ce mode de fonctionnement, on peut voir l'interféromètre comme un instrument dédié à la mesure du degré de cohérence spatial de la source $\gamma_{12}(\mathbf{0}) = \mu_{12}$. A haute résolution spectrale en effet, seule la mesure du degré de cohérence spatial devient pertinente⁷. La mesure doit être effectuée en amplitude mais également en phase. L'acquisition de la phase dans le domaine des longueurs d'onde optiques est indirecte et requiert l'emploi d'une technique instrumentale fonctionnant avec au moins 3 télescopes connue sous le nom de *clôture de phase*. En assurant une couverture assez dense du plan (u,v) c'est à dire en parcourant diverses lignes de base (en norme et en orientation), on est capable de remonter à sa distribution de brillance, en inversant la relation de Fourier spatiale donnée dans l'équation Eq. (4.27).

L'image synthétisée est alors caractérisée par une forte résolution angulaire, $R_\alpha = \bar{\sigma} \max b_{12}$, limitée par la plus grande fréquence spatiale analysable par l'interféromètre. L'élément de résolution angulaire obtenu sur la carte synthétisée est $\delta_\alpha = \frac{1}{R_\alpha}$. Toute variation de brillance à cette échelle spatiale est donc en principe décelable. Le pouvoir résolvant et les résolutions angulaires théoriquement atteintes à la limite de la diffraction par quelques interféromètres actuellement en fonctionnement sont présentées sur la figure Fig.4.4. L'image reconstruite est identique à celle obtenue par un télescope dont l'ouverture serait d'un diamètre équivalent à $\max b_{12}$ et opérant à la limite de la diffraction angulaire. Inversement, on peut voir le processus de formation d'image au foyer d'un télescope comme un processus interférentiel. L'image est obtenue par addition incohérente des interférogrammes produits

⁷Puisque la pureté cross-spectrale impose la dépendance temporelle du degré de cohérence spatio-temporel.

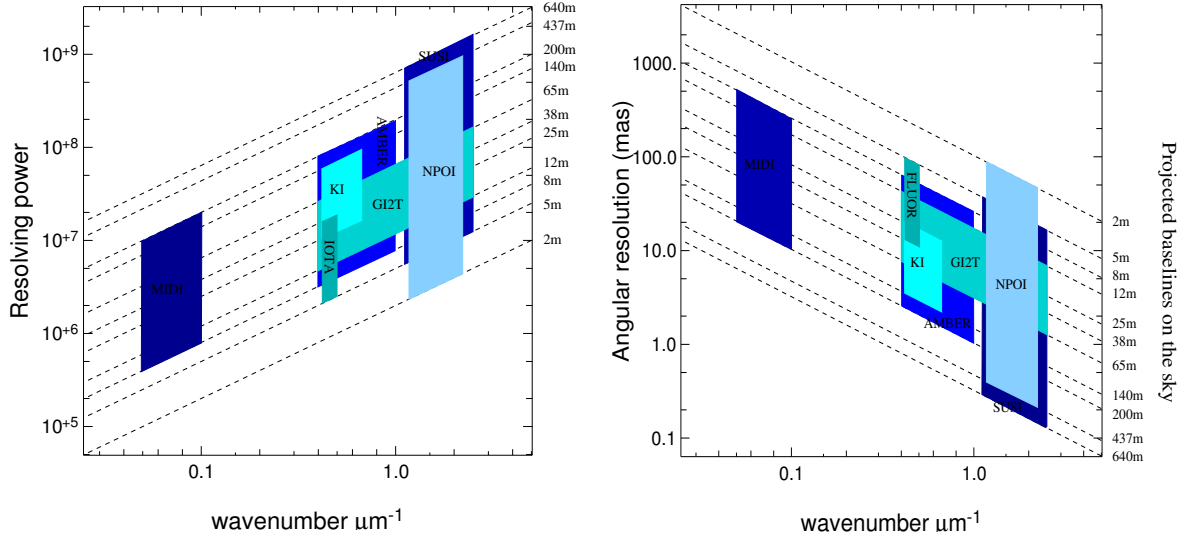


Fig. 4.4 – Pouvoir de résolution et résolution angulaire de quelques interféromètres actuels en fonction du nombre d’onde et la ligne de base projetée sur le ciel.

entre chaque couple de points situés sur l’ouverture. Il y a donc une équivalence forte entre couverture du plan (u, v) et synthèse d’ouverture.

Pour obtenir un spectre spatial de la brillance (en termes de fréquences spatiales) aussi “complet” que possible on voit qu’il faut obtenir des mesures du degré de cohérence spatial pour de nombreuses lignes de bases. En pratique la couverture (u, v) est assurée soit par effet de super-synthèse (utilisation du mouvement rotation diurne terrestre) dans le cas de télescopes fixes ou difficilement repositionnables, soit par effet de synthèse d’ouverture via deux antennes déplaçables à différents endroit, ou bien encore en utilisant un réseau interférométrique fixe constitué de N télescopes donnant accès à $\frac{N(N-1)}{2}$ lignes de bases simultanément. Dans tous les cas, il faut retenir que la couverture du plan (u, v) n’est que partielle et discrète.

A titre d’exemple, pour mesurer le terme de clôture de phase on doit disposer d’un réseau interférométrique constitué de 3 antennes ou plus. La méthode de *clôture de phase* a été initialement introduite en radio-astronomie par Jennison [47] puis portée aux longueurs d’ondes optiques par Rogstad [92]. L’identification formelle du terme de la clôture à la phase du bispectre a été réalisée par Roddier [89]. Pour présenter la méthode, considérons un interféromètre composé de trois antennes échantillonnant le degré spatial de cohérence sur 3 lignes de bases \mathbf{b}_{12} , \mathbf{b}_{31} , \mathbf{b}_{31} , formant un triangle ou la relation de Chasles s’applique $\mathbf{b}_{13} = \mathbf{b}_{12} + \mathbf{b}_{23}$. Le bispectre est la mesure de $\mu_{12} \mu_{23} \mu_{13}^*$. La phase du bispectre est donc $\arg(\mu_{12}) + \arg(\mu_{12}) + \arg(\mu_{31})$. Cette dernière ne dépend que des valeurs du degré de cohérence de l’objet entre les lignes de bases considérées. En particulier on montre facilement qu’elle est rigoureusement insensible à toute phase d’aberration atmosphérique $\phi_{i=1,2,3}$ éventuellement présente sur chaque antenne. Dans ce cas, la clôture de phase reste égale l’addition des phases du degré de cohérence de l’objet à trois fréquences spatiales bouclées dans le triangle. Considérons à présent un réseau interférométrique comportant N antennes et dont les lignes de base sont non redondantes. Le nombre de bases vaut $\mathcal{C}_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$, le nombre de clôtures possibles est $\mathcal{C}_N^3 = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$, mais seules $\mathcal{C}_{N-1}^2 = \frac{(N-2)(N-1)}{2}$ sont réellement indépendantes. On peut rapporter le nombre de clôtures indépendantes au nombre de phases objet à déterminer, ce dernier étant simplement égal au nombre

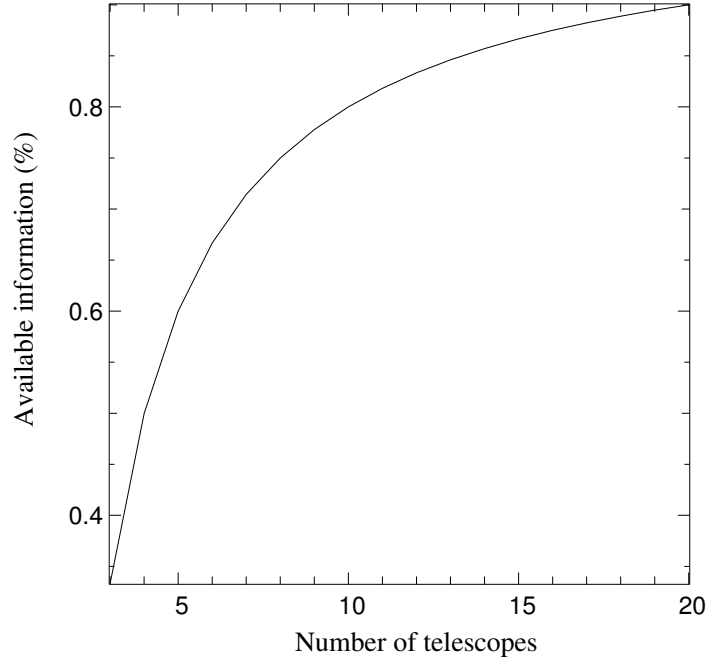


Fig. 4.5 – Efficacité de la clôture de phase en fonction du nombre de télescopes.

de bases du réseau. Ce nombre, $\eta = \frac{N-2}{N}$, l'efficacité de clôture, permet de quantifier la fraction d'information contenue dans les termes de clôtures de phase. Cette fraction utilisable de l'information est représentée figure Fig.4.5. Pour une configuration des lignes de base non redondante, l'information est donc partielle. On sera obligé de fixer la valeur d'éliminer les inconnues surnuméraires en utilisant des configurations pupillaires redondantes afin d'en fixer la valeur, soit ajouter des contraintes supplémentaires dans le processus de reconstruction de l'image. Les radio-interférométristes ont depuis longtemps développé divers algorithmes de reconstruction d'image pour pallier ce manque d'information. Lannes [53] décrit les méthodes de reconstruction à partir des visibilitées et des clôtures. On peut conceptuellement séparer la mesure du degré spatial de cohérence (acquisition et réduction des données) du processus de reconstruction de l'image proprement dite. Dans ce travail nous porterons notre attention sur la première phase du traitement même si par instant nous aurons l'occasion de revenir sur le second.

4.4.3 Interférométrie Double-Fourier

Nous venons de voir les principes élémentaires de l'imagerie par synthèse d'ouverture à haute résolution spectrale. Ce mode de fonctionnement des interféromètres sera sans nul doute le mode élémentaire de fonctionnement des interféromètres de prochaine génération⁸. Dans ce mode de fonctionnement, on ne peut évidemment avoir accès qu'à l'information spatiale à une longueur d'onde donnée sur la distribution de brillance de la source. Pour combiner à la fois information spectrale et information spatiale sur la source, on peut acquérir plusieurs mesures quasi-momochromatiques du degré spatial de cohérence μ_{12} pour diverses fréquences optiques centrales $\bar{\nu}$ dur rayonnement et pour diverses lignes de base. Il suffit alors d'inverser la relation de Fourier spatiale pour chaque point de

⁸Le mode de fonctionnement de base actuel consistant plutôt en la mesure quadratique des visibilitées de l'objet

mesure acquis dans le domaine spectral. Ceci requiert une dispersion spectrale des interférogrammes. GI2T est un exemple d'interféromètre ayant cette capacité (Mourard et al. [70]).

Mais autant d'une faire d'une pierre deux coups en perdant le moins de photons possible. Il s'avère que l'on peut aussi reconstruire la distribution spatio-spectrale de brillance directement à partir du degré de cohérence *spatio-temporel* mesuré en bande large. Ce mode-opératoire constitue l'essence même de l'interférométrie double-Fourier Mariotti [62]. Il s'appuie quant à lui sur une utilisation extensive du théorème de Zernike-Van-cittert généralisé à la cohérence spatio-temporelle de l'onde. On peut en effet généraliser le théorème de Zernike-Van-cittert au cas d'une source polychromatique, incohérente spatialement. Tout revient à raisonner par unité de bande passante optique. On retrouve la distribution de brillance de l'objet par unité de bande passante optique $B(\boldsymbol{\alpha}, \sigma)$. La densité spectrale mutuelle $\mathcal{G}_{12}(\sigma)$ de la radiation aux points du plan-pupille considérés, par généralisation du théorème de Zernike-Van Cittert s'obtient par la transformée de Fourier spatiale,

$$\mathcal{G}_{12}(\sigma) = \frac{1}{4} \int B(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) \exp(-2i\pi\sigma \mathbf{b}_{12} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (4.37)$$

A un facteur constant près, on peut voir la densité spectrale mutuelle comme l'intensité mutuelle par unité bande passante spectrale. De la même façon on étend la notion de degré spatial de cohérence avec,

$$\mu_{12}(\sigma) = \frac{\mathcal{G}_{12}(\sigma)}{\mathcal{G}(\sigma)} \quad (4.38)$$

ou $\mathcal{G}(\sigma)$ est la densité spectrale de la source au nombre d'onde σ ,

$$\mathcal{G}(\sigma) = \frac{1}{4} \int B(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\boldsymbol{\alpha} \quad (4.39)$$

La fonction de cohérence sur toute la bande passante de la radiation est alors obtenue intégralement par la relation Eq. (4.15), sa partie réelle par l'équation Eq. (4.17) et les degrés complexe et réel de cohérence dérivent des relations données en Eq. (4.22) et Eq. (4.23). En définitive le degré complexe de cohérence spatio-temporel du front d'onde vaut,

$$\gamma_{12}(x) = \frac{\int_0^\infty \exp(-2i\pi\sigma x) \mathcal{G}_{12}(\sigma) d\sigma}{\int_0^{+\infty} \mathcal{G}(\sigma) d\sigma} \quad (4.40)$$

et la partie réelle du degré complexe de cohérence devient,

$$\gamma_{12}^{(r)}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\sigma x) \mathcal{G}_{12}(\sigma) d\sigma}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\sigma) d\sigma} \quad (4.41)$$

Le théorème de Zernike-Van-cittert généralise la relation de Fourier au domaine spectral. La transformée de Fourier temporelle inverse du degré de cohérence de l'onde réelle $\gamma_{12}^{(r)}$ fournit la densité spectrale mutuelle du rayonnement normalisée pour chacune des lignes de base acquises. Pour chaque nombre d'onde σ , une transformée de Fourier inverse au sens spatial permet de reconstruire la distribution de brillance de l'objet. Au sens de l'interférométrie double-Fourier, on peut sonder la cohérence d'une onde c'est à dire être capable d'échantillonner la carte du degré de cohérence $\gamma_{12}^{(r)}(x)$ de l'onde lumineuse produite par la source sur le plan d'entrée de l'interféromètre en balayant l'espace des lignes de bases \mathbf{b}_{12} de l'interféromètre ainsi que l'espace des différences des retards optiques x . La nature profonde des données interférométriques ainsi acquises se révèle être véritablement tri-dimensionnelle. Lorsque l'on travaille opère à longueur de base nulle, en bande large, en échantillonnant l'espace des

retards optiques on ne peut obtenir qu’une information sur la densité spectrale de la source. Le degré réel de cohérence apparaît comme la transformée de Fourier de la densité spectrale normalisée. Cette relation de Fourier peut-être à son tour inversée dans le plan des nombres d’ondes et l’interféromètre fonctionne comme un spectromètre à transformée de Fourier. Le mode double Fourier est donc une généralisation à longueur de base non nulle de la spectrométrie à transformée de Fourier.

4.5 Mesures interférométriques

4.5.1 Interférométrie par division d’onde

Pour mesurer la cohérence spatio-temporelle du front d’onde émis par une source lumineuse sur la pupille d’entrée d’un interféromètre stellaire, il faut nécessairement “diviser” l’onde incidente au niveau de ces points et corrélérer les ondes ainsi prélevées tout en leur ayant fait suivre au préalable des trajets optiques différents (balayage de la différence de marche optique). La corrélation est obtenue en combinant interférométriquement les deux signaux entre eux. On parle alors d’interférométrie d’amplitude, par division de front d’onde⁹. Le signal fourni par un interféromètre n’est pas directement l’image de la source mais une figure d’interférence ou interférogramme, issu de la recombinaison des faisceaux. La question principale est de savoir quel lien unit l’interférogramme à la fonction de cohérence spatio-temporelle de la source.

Pour répondre à cette question, on peut commencer par s’inspirer d’une vision standard de la recombinaison interférométrique à deux télescopes livrée dans littérature. Si l’on se réfère à la loi générale des interférences stationnaires développée dans [10], l’interférogramme *polychromatique* a pour expression générale, en un point donné de la recombinaison,

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma_{12}^{(r)}(x) \quad (4.42)$$

I_1 et I_2 est l’intensité produite au point de recombinaison par chacun des faisceaux. x est la différence de marche optique entre les faisceaux recombinaison. $\gamma_{12}^{(r)}$ est le degré *réel* de cohérence *spatio-temporelle* de la source entre les ouvertures *supposées ici ponctuelles*. La vision de la recombinaison interférométrique développée ici est une vision restrictive puisqu’elle suppose d’une part un prélèvement “ponctuel” des faisceaux analogues au trous d’Young, ignorant les effets dus à la dimension finie des pupilles. Mais si la source n’est pas résolue angulairement par une pupille, celles-ci apparaîtront comme des trous ponctuels, l’effet peut être négligé. D’autre part elle néglige les effets dus à la bande passante finie en nombres d’onde (filtrage spectral). Si la densité spectrale mutuelle de la source n’est pas résolue spectralement sur la bande passante du filtre utilisé, l’effet de troncature est négligeable. Le degré de cohérence spatio-temporel mesuré est bien celui de l’objet.

Cette équation de base renseigne quand même sur un fait important. Si l’on module la différence de marche spatialement (à l’aide d’une combinaison multiaxiale des faisceaux) et/ou temporellement (à l’aide d’un balayage temporel de la différence de marche optique en combinaison coaxiale), alors le signal est décomposable en deux contributions, à savoir un signal à haute fréquence spatiale ou temporelle les franges d’interférence, $2\sqrt{I_1 I_2} \gamma_{12}^{(r)}(x)$ et une contribution non modulée, le continu de l’interférogramme constitué de la somme des intensités provenant des deux ouvertures $I_1 + I_2$. En choisissant convenablement les fréquences de modulation on peut séparer le continu du signal des

⁹Il existe 2 autres techniques d’interférométrie longue base employées en astronomie, l’interférométrie hétérodyne et l’interférométrie d’intensité, que nous n’aborderons pas dans ce travail.

franges d'interférence. On peut alors mesurer le degré de cohérence spatio-temporel de la source.

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma_{12}^{(r)}(x) \quad (4.43)$$

Lors de la modulation de la différence de marche, la partie réelle du degré spatio-temporel oscille sur l'intervalle $\pm|\gamma_{12}(x)|$ suivant que les franges sont en interférences constructives ou non. Le contraste des franges d'interférence est intuitivement mesuré par la grandeur :

$$\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{\frac{I_1 + I_2}{2}} |\gamma_{12}(x)| \quad (4.44)$$

Le contraste des franges ne permet de mesurer le module du degré complexe de cohérence spatio-temporel de la source, (égal à la visibilité de l'objet dans le cas monochromatique) que si l'interférogramme est équilibré photométriquement i.e $I_1 = I_2$. Sinon, celui-ci est déterminé à la valeur près d'un contraste instrumental $\frac{\sqrt{I_1 I_2}}{\frac{I_1 + I_2}{2}}$. Le contraste des franges n'est pas un bon bon estimateur du degré de cohérence spatio-temporelle de la source, dans le cas polychromatique. C'est un bon estimateur de la visibilité de l'objet dans le cas monochromatique si le signal est équilibré photométriquement. Dès lors comment mesurer la partie réelle du degré de cohérence de la source ? On mesure I_1 en occultant I_2 , et vice-versa. On mesure enfin I . On redresse l'interférogramme en formant,

$$\gamma_{12}^{(r)}(x) = \frac{I(x) - I_1 - I_2}{2\sqrt{I_1 I_2}} \quad (4.45)$$

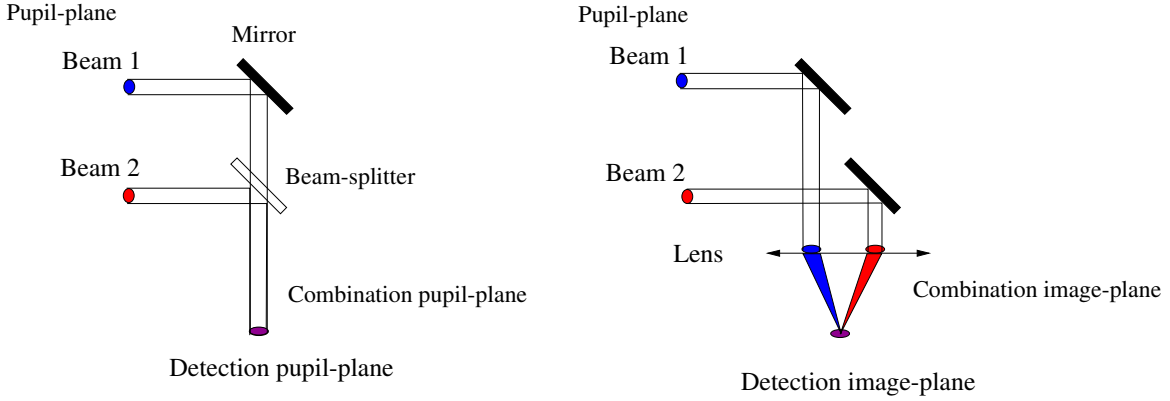
Dans le cas monochromatique, on aura,

$$|\mu_{12}| \cos(x + \phi_{12}) = \frac{I(x) - I_1 - I_2}{2\sqrt{I_1 I_2}} \quad (4.46)$$

soit un interférogramme redressé de ses fluctuations photométriques et dont l'amplitude mesure le degré de cohérence spatial de l'objet observé. On peut paralléliser les opérations en dérivant des signaux de calibration proportionnels aux contributions du continu interférométrique. $P_1 = v_1 I_1$, $P_2 = v_2 I_2$. Les rapports de proportionnalité seront préalablement déterminés en enregistrant I_1 et P_1 simultanément en occultant I_2 et vice versa. Une propriété naturelle de la calibration photométrique du signal frangé est son indépendance eu égard aux fluctuations photométriques de l'interférogramme. L'estimateur est par construction insensible au déséquilibre photométrique des signaux en interférences. Historiquement, la calibration de la visibilité des franges au continu de l'interférogramme a été mise au gout du jour en interférométrie stellaire avec l'apparition d'interféromètres munis de guide d'onde optiques monomodes pour la raison essentielle que les fluctuations de phase atmosphérique sur la pupille d'entrée du système interférométrique sont converties en fluctuations d'intensité, l'interférogramme corrigé des ses fluctuations photométriques est rendu insensible '*aux conditions de turbulence atmosphérique*'¹⁰, (Coudé du Foresto [20]).

Nous voyons que la réponse à la question du lien unissant la mesure au degré de cohérence de la source est essentielle, et pourtant en réalité elle est loin d'être univoque car elle dépend tout d'abord de plusieurs facteurs instrumentaux : le mode de recombinaison choisi (modulation spatiale ou temporelle des franges d'interférence sur le détecteur), de la conjugaison optique du plan de la détection avec le plan de la pupille d'entrée de l'interféromètre (interférométrie (plan pupille) ou avec le plan de la source (plan-image)—dans cas la taille relative de la figure de diffraction d'une pupille individuelle par rapport à la dimension angulaire de la source importe beaucoup—du caractère

¹⁰Nous nuancerons ultérieurement cette affirmation.



Coaxial combination

Multi-axial combination

Fig. 4.6 – Représentation schématique d’une configuration multi-axiale plan-image et coaxiale-plan-pupille. Il s’agit là des configurations les plus courantes. On peut également recombinaison les faisceaux en mode coaxial plan-image et multi-axial plan-pupille.

monomode ou multimode¹¹ et enfin de la polychromaticité du rayonnement interféré. Elle dépend aussi de l’estimation du contraste et de la calibration choisie en fonction des signaux dont on dispose. Ce lien s’avère être en toute généralité assez compliqué. Penchons nous qualitativement sur les concepts instrumentaux que nous venons d’introduire. Tous ces concepts ont été répertoriés et classés dans Mariotti [63], dans le cadre d’une étude des possibilités de recombinaison cohérente des faisceaux du VLT.

4.5.2 Les modes de recombinaison

Les modes de recombinaison sont définis suivant l’angle entre les directions de propagation des faisceaux qui sont recombinaison. Dans une recombinaison *coaxiale*, les faisceaux semblent émaner d’une seule et même direction. Dans une recombinaison *multi-axiale*, les faisceaux après mélange semblent provenir de directions différentes. En interférométrie optique non astronomique, le paradigme expérimental d’une recombinaison coaxiale des faisceaux est l’interféromètre de Michelson. Celui associé à une recombinaison coaxiale des faisceaux est sans doute le dispositif des trous d’Young. La figure Fig.4.5.2 illustre ces modes de recombinaison. Dans le cas d’une recombinaison coaxiale les franges obtenues sur le détecteur sont codées (modulées) temporellement à l’aide d’un balayage de la différence de marche (ddm) autour de ddm nulle. Les franges sont modulées au nombre d’onde $\sigma_{mod} = \frac{v}{c}$, ou v est la vitesse du scan. Dans le cas d’une recombinaison multi-axiale monochromatique, les franges sont modulées spatialement sur le détecteur à la fréquence spatiale optique $f' = \sigma b_{12}$, où σ est le nombre d’onde et b_{12} la distance séparant les pupilles de sortie de l’interféromètre.

4.5.3 Interférométrie plan-pupille et plan-image

Pour distinguer ces deux concepts instrumentaux nous raisonnerons ici sur un interférogramme monochromatique et donc une mesure du degré de cohérence spatial de la source. La distinction entre interférométrie plan-pupille et plan-image est assez simple à comprendre. On parle d’interférométrie

¹¹Le caractère monomode ou multimode d’un faisceau est son aptitude à pouvoir transporter de l’information spatiale.

plan-pupille lorsque la la recombinaison des faisceaux a lieu dans un plan conjugué optiquement à la pupille d'entrée, plan-image lorsque les faisceaux sont additionés dans un plan optiquement conjugué *au plan de la source*, au sens de l'optique Fourier. Cependant, il existe *une différence fondamentale* plus subtile entre ces modes de recombinaison du point de vue de la propagation de la cohérence spatiale au sein de chaque système. Cette distinction concerne leur capacité à mesurer une multiplicité ou non de fréquences spatiales à l'interférogramme.

L'interférométrie plan-pupille a été analysée par divers auteurs, (Chelli [13]). *Schématiquement*, un interféromètre plan-pupille ne peut coder *qu'une et une seule fréquence spatiale* sur l'objet (celle associée à la ligne de base de l'interféromètre). Ce codage est obtenu par le recouvrement translaté des pupilles¹². Le degré de cohérence à cette fréquence spatiale devient, à une *fonction de transfert instrumentale multiplicative* près calibrable en observant une source non résolue par l'interféromètre (un calibrateur). L'hypothèse sous-jacente étant que la fonction de transfert globale ne varie pas entre l'observation de la cible scientifique et celle du calibrateur.

La recombinaison multiaxiale des faisceaux a été étudiée par Rodddier & Léna [88], en mode Fizeau. La pupille de sortie interférométrique est supposée être reconfigurée, homothétiquement par rapport à la pupille d'entrée. On distingue communément le cas où la reconfiguration de la pupille est homothétique (reconfiguration de type Fizeau) ou non (reconfiguration de type Michelson). La généralisation de l'équation interférométrique pour une reconfiguration Michelson générale été formulée en conditions quasi-monochromatique pour un nombre quelconque de télescopes par Tallon [102]. La particularité d'une recombinaison de type Michelson par rapport à une recombinaison homothétique de type Fizeau est qu'il faut tenir compte de la translation en fréquences spatiales induite par la reconfiguration pupillaire, qui brise l'invariance par translation du système interférométrique. Selon une analyse pertinente de l'auteur, il est toujours possible rétablir cette dernière par une translation numérique convenable du spectre haute-fréquence. Dans une recombinaison multiaxiale la partie haute fréquence du signal (les franges d'interférence) est *séparée* du continuum non modulé. On évite ainsi le mélange du continu de l'interférogramme, avec le signal frangé. Les pupilles reconfigurées étant bien définies (à support compact dans l'espace), il en va de même en ce qui concerne la coupure du pic frange en fréquence spatiale et de la somme des pics basse-fréquence (provenant de l'autocorrélation spatiale de chacune des fonctions pupilles), ce qui permet d'assurer leur séparabilité, sous la condition évoquée plus haut.

Par cet artefact numérique (recentrage du pic frange codé sur le détcteur), on se ramène donc à un système linéaire invariant par translation, caractérisé par une relation multiplicative sur le plan de Fourier de l'objet observé. Dans ce cas, selon un résultat classique Rodddier & Léna [88] on obtient une multiplication du degré de cohérence spatial par *le pic frange*, agissant comme une fonction de transfert sur le plan de Fourier de l'interférogramme.

$$\mu_{\star}(\mathbf{f})T^{12}(\mathbf{f} - \sigma\mathbf{B}^{12}) \quad (4.47)$$

Le pic haute fréquence, est recentré à la fréquence spatiale correspondant à la ligne de base de l'interféromètre \mathbf{B}^{12} . Il est utile de préciser que *Dans le cas de l'interférométrie multimode plan-image, le plan de Fourier de l'interférogramme est le même plan que le plan des fréquences spatiales de l'objet* : on obtient une image frangée de la source observée. Nous verrons qu'en interférométrie monomode ce n'est plus du tout le cas.

¹²On laissera de coté le cas des rotations symétries etc...avant superposition.

4.5.4 Estimateurs de visibilité

En condition quasi-monochromatiques, la relation objet-image précédente autorise une estimation du degré de cohérence de l'objet soit, point par point, soit intégralement sur le support du pic fringe. L'estimation point par point permet de recouvrer l'information spatiale sur l'objet dans domaine fréquentiel limité au support du pic fringe. L'estimation point par point est donc une estimation adaptée à l'imagerie par synthèse d'ouverture. En revanche l'estimation de visibilité intégrale produit une valeur unique du degré de cohérence *unique* moyennée sur le support du pic fringe. On distingue aussi les estimateurs de visibilité qui agissent de manière linéaire ou de manière quadratique par rapport au pic fringe. Si en laboratoire on peut se permettre d'utiliser une estimation du degré de cohérence spatial, via une estimation linéaire sur le pic fringe, sur le ciel en revanche, cette approche est problématique à cause de la turbulence atmosphérique, qui tend instantanément à répartir les franges sur un grand nombre de tavelures. Le nombre moyen de speckles dans l'image est proportionnel au rapport $N = (D/r_o)^2$ ou r_o , paramètre de Fried corrigé par optique adaptative (typiquement la distance interacteurs), mesure l'échelle de cohérence spatiale des fluctuations du champ atmosphérique sur les pupilles après correction. Ces speckles, de phase aléatoire, vont bouger erratiquement au cours du temps d'intégration sur le plan image et finir par détruire le signal des franges en le brouillant. L'étude de la correction partielle par optique adaptative sur l'imagerie monopupille et ses implications sur la stabilisation du signal interférométrique est présentée dans Conan [18]. En considérant des pupilles de même dimension,

$$\langle T^{12}(\mathbf{f}) \rangle = \overline{T^{12}}(\mathbf{f}) \exp(-\sigma_{12}^2) \exp(-\sigma_{\text{atm+corr}}^2) \quad (4.48)$$

$\overline{T^{12}}(\mathbf{f})$ est le pic fringe idéal provenant du produit de corrélation spatiale des pupilles non aberrées, et $B_{\text{atm+corr}}(\mathbf{f})$ est la fonction de transfert atmosphérique corrigée par optique adaptative. Le pic fringe long-temps de pose $\langle T^{12}(\mathbf{f}) \rangle$ (moyen au sens du processus turbulent) ne pas en résolution angulaire (limitée à $\frac{D}{\lambda}$) mais se trouve détruit par la turbulence notamment par le piston différentiel atmosphérique présent entre les ouvertures dont σ_{12}^2 est la variance (c.f. Eq. (1.32)). $\sigma_{\text{atm+corr}}^2$ désigne la variance de la phase résiduelle sur chacune des pupilles après correction par optique adaptative. Sans contrôle adaptatif ni suiveur de franges, le signal interférométrique disparaît complètement, au profit du continu de l'interférogramme. Les estimateurs linéaires long-temps de pose ne sont guère utilisables pour l'interférométrie stellaire au sol. Ils ne peuvent l'être que si les pupilles sont cophasées, ce qui implique un recours à une correction partielle par optique adaptative, de manière à réduire le nombre de speckles dans l'image (augmenter le r_o) et à un contrôle dynamique du piston différentiel par un suiveur de franges.

C'est pourquoi a-t-on plutôt recours à des estimateurs quadratiques sur le pic fringe, dont la définition découle en droite ligne des techniques d'imagerie speckle permettant de restaurer de l'information à haute fréquence spatiale. On utilise pour ce faire *la densité spectrale du signal* ou fonction de transfert speckle sur le plan de Fourier (Mourard et al. [71]). La table 4.5.4 résume les estimateurs de visibilité couramment employés pour traiter le cas d'une recombinaison multiaxiale.

On conçoit immédiatement l'avantage d'utiliser des estimateurs point par point par rapport aux estimateurs intégraux. Grâce à eux, on peut avoir accès à l'information spatiale sur l'objet autour d'un rayon typiquement sur un rayon typiquement équivalent $\frac{r_o}{\lambda}$ autour la fréquence de la base. Cependant l'estimation point par point est moins performante du point de vue rapport signal bruit que l'estimation intégrale du pic fringe (moyenne sur un ensemble de fréquences spatiales) Conan [18].

Mais si l'on se tourne du côté des estimateurs de visibilité intégraux d'autres problèmes émergent

Tab. 4.1 – Estimateurs long-temps de pose, court temps de pose, linéaires et quadratiques

Analyse long temps de pose linéaire + contrôle du piston différentiel	
Estimateurs intégraux	$\langle V \rangle \propto \int \mu_\star(\mathbf{f}) \langle T^{12}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{12}) \rangle d\mathbf{f}$
Estimateurs point par point	$\langle V \rangle \propto \mu_\star(\mathbf{f}) T^{12}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{12})$
Analyse speckle quadratique	
Estimateurs intégraux	$\langle V^2 \rangle \propto \int \mu_\star(\mathbf{f}) ^2 \langle T^{12}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{12}) ^2 \rangle d\mathbf{f}$
Estimateurs point par point	$\langle V^2 \rangle \propto \mu_\star(\mathbf{f}) ^2 T^{12}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{12}) ^2$

notamment si le spectre de l’objet n’est pas constant sur le support du pic fringe. L’estimation sera mal adaptée puisqu’elle induira une convolution dans l’espace des fréquences spatiales (linéairement ou quadratiquement), ce qui revient à une multiplication de l’image par un “lobe” dont le champ de vue sur le ciel sera limité à un mono-speckle. La réduction du champ de vue est ici *d’origine numérique*. Il est important de constater que cette factorisation ne tient plus lorsque l’on utilise une estimation intégrale sur le pic-fringe dans le cas de l’observation de sources étendues dont l’extension angulaire est significativement plus grandes que celle d’une tâche d’Airy. La vraie relation objet-image après estimation intégrale de la visibilité étant une relation de convolution dans l’espace de Fourier. *Les estimateurs intégraux ne sont pas adaptés à l’imagerie interférométrique.*

Lors que les pupilles sont petites, on peut négliger les variations du degré de cohérence spatial de l’objet sur le support du pic fringe et du pic basse fréquence (non résolution angulaire à l’échelle d’une pupille). Le degré de cohérence devient factorisable du pic fringe et l’on se ramène à une situation équivalente à l’interférométrie plan-pupille du point de vue de la transmission des fréquences spatiales par le système -à savoir *une seule fréquence transmise estimée au maximum du pic fringe*, avec un degré de cohérence spatial mesuré, devenant factorisable des dégradations de contrastes instrumentales et atmosphériques. Le degré de cohérence spatial effectivement mesuré s’obtient multiplicativement par rapport au degré de cohérence de l’objet.

En ce qui concerne la calibration photométrique de la visibilité, pour des estimateurs intégraux ou point par point, on envisage traditionnellement une calibration du *contraste* en normalisant par rapport à l’intégrale ou à l’origine du pic basse-fréquence (linéaire ou quadratique). C’est l’option de base décrite dans Roddier & Léna [88]. Cette calibration, si elle présente un intérêt historique, ne permet pas de s’affranchir totalement des effets de la turbulence atmosphérique.

4.6 Conclusion

Nous voyons dans ce chapitre que la relation objet-image dans un interféromètre est fortement liée au concept instrumental. In fine elle dépend même du traitement de données appliqué a posteriori aux interférogrammes produits (estimateurs). En interférométrie plan-image, lorsque la source n’est pas résolue par une pupille individuelle, la visibilité de l’objet est factorisable d’une visibilité instrumentale et atmosphérique, calibrables en observant une non résolue à l’échelle de la base interférométrique (un calibrateur). Et ce quel que soit l’estimateur utilisé. C’est aussi vrai lors d’une estimation point par point de la visibilité et ce quelque soit les dimensions de la source par rapport à la tâche de diffraction d’une pupille individuelle. De ce point de vue, on rejoint l’interférométrie plan-pupille ou par unicité même de la base codée, la visibilité de l’objet n’est *toujours* mesurée qu’en une seule fréquence spatiale. Ce n’est plus le cas lors d’une estimation intégrale de si le degré de cohérence de l’objet présente une

pente sur le support du pic frange.

A l'heure où l'on propose la recombinaison interférométrique de pupilles géantes (c.f. chapitre 1) par le biais de guides d'onde monomode, il devient absolument capital de cerner les caractéristiques de la relation objet-image pour ce type d'interféromètre. Quand j'ai commencé à m'intéresser à la relation objet-image pour un interféromètre monomode fibré, je me suis rendu compte à la lecture des thèses produites autour de l'instrument FLUOR que cette relation était appréhendée au sens de l'interférométrie plan-pupille (Perrin [79]) une approche justifiée *à priori* par la recombinaison coaxiale des pupilles filtrées par la fibre. Dans ces travaux on considère donc que le degré de cohérence mesuré est le degré de cohérence de l'objet factorisé par une transfert atmosphérique calibrable. Cependant après la propagation dans une fibre, la structure spatiale du champ électrique est imposée par le mode fondamental de la fibre lui-même (c.f. chapitre 2). Autrement dit ce n'est pas parce-que l'on recombine les faisceaux dans un plan-pupille, que l'on fait de la "vraie" interférométrie plan-pupille pour autant. Après filtrage spatial monomode, la pupille de sortie de l'interféromètre ou le plan de la détection perdent toute notion de conjugaison optique avec le plan de la source ou son plan conjugué, au sens de l'optique de Fourier traditionnelle.

La caractérisation de la relation objet-image pour un interféromètre monomode fait l'objet du chapitre suivant. Cette caractérisation s'appuie sur une articulation de la théorie de la cohérence partielle développée dans ce chapitre avec l'analyse modale d'un guide d'onde présentée au second chapitre de ce document.

Chapitre 5

Guidage et Cohérence partielle

Sommaire

5.1	Couplage monopupille	119
5.1.1	Modes géométriques	119
5.1.2	Intensité monomode	127
5.1.3	Pupille effective	128
5.1.4	Lobe d'antenne photométrique	130
5.1.5	Section efficace	134
5.1.6	Propagation de la cohérence partielle	135
5.1.7	Influence de la source	137
5.1.8	Influence de la turbulence atmosphérique	138
5.2	Couplage multi-pupilles	145
5.2.1	Intensité mutuelle	145
5.3	Recombinaison coaxiale	147
5.3.1	Pixel To Visibility Matrix	147
5.4	Cohérence partielle	150
5.4.1	Lobe d'antenne interférométrique	150
5.4.2	Propagation de la cohérence partielle	151
5.4.3	Discussion	153
5.5	Vers le Multimode ?	154
5.6	Conclusion	157

Lorsque l'on insère un filtre modal dans le design optique d'un interféromètre, les notions d'interférométrie plan-image ou plan-pupille perdent complètement leur signification. En effet le filtrage spatial impose de manière déterministe la structure spatiale du champ électromagnétique sur la pupille interférométrique reconfigurée. On ne codera aucune fréquence spatiale sur l'objet en superposant les pupilles, comme c'est le cas en interférométrie plan-pupille. Pas plus que l'image produite par la diffraction du mode n'aura de connection réelle avec le plan image de la source l'objet, comme c'est le cas lorsque l'on forme une image frangée de celle-ci dans le cas d'une recombinaison multiaxiale multimode. Ou se trouve donc l'information sur le degré de cohérence de la source ?

La seule possibilité restante pour trouver l'information sur l'objet, réside dans les facteurs de conversion photométriques dues au filtrage modal, i.e les taux de couplage du signal stellaire et dans

la corrélation interférométrique des amplitudes complexes couplées sur le guide. Le point de vue que je défends ici c'est que dans le cas d'un filtrage modal, on forme une corrélation *de photons* tout comme en *radio-astronomie*. La corrélation est transportée par des ondes peuvent être superposées tantôt en multiaxial ou en monoaxial. Les modes de recombinaison forment la corrélation et on les remercie vivement mais ils n'ont aucune influence sur la manière dont est transmise l'information sur l'objet. J'ai conduit une étude formelle de la propagation de la cohérence partielle des équations au sein d'un interféromètre fibré en conditions de rayonnement quasi-monochromatique fondé sur cette vision des choses. Dans ce chapitre final je considère que la réjection des modes rayonnés est suffisante (c.f. chapitre 4) pour que l'on puisse négliger leur effet sur le transport de la cohérence partielle, je me me restreint donc à l'étude du transport de la cohérence partielle par le mode fondamental d'un guide monomode. Ceci-dit, les développements présentés dans la suite pourrait faire l'objet d'une généralisation au paquet d'onde rayonné dans le guide. Une telle généralisation dépasse le cadre de l'exposé qui va suivre.

5.1 Couplage monopupille

Dans le premier chapitre nous avons vu que pour un rayonnement purement monochromatique, de nombre d'onde σ , l'amplitude complexe couplée sur le mode fondamental d'un guide d'onde monomode est donné par l'intégrale de recouvrement (c.f. Chapitre 2, Eq. (2.70)) des amplitudes complexes monochromatiques du champ électromagnétique imagé sur le plan d'entrée de la fibre e_{in} et du mode fondamental e_{01} ¹.

$$c_{01}(\sigma) = e_{\text{in}}(\sigma) |e_{01}(\sigma). \quad (5.1)$$

La puissance optique couplée sur le mode est donnée par $|c_{01}|^2(\sigma)$. Le taux d'injection monomode monochromatique étant la normalisation de ce nombre de photons par le nombre de photons imagés sur le plan d'entrée.

$$\eta_{01}(\sigma) = \frac{|c_{01}|^2(\sigma)}{\|e_{\text{in}}\|^2(\sigma)}. \quad (5.2)$$

Une conséquence du théorème de Parseval est que l'expression du taux de couplage est formellement invariante vis à vis d'une transformation de Fourier spatiale (isométrique),

$$c_{01}(\sigma) = \widetilde{e_{\text{in}}}(\sigma) | \widetilde{e_{01}}(\sigma), \quad (5.3)$$

où $\widetilde{e_{\text{in}}}$ (resp. $\widetilde{e_{01}}$) désigne la paire de Fourier de e_{in} (resp. e_{01}). Par conséquent le taux de couplage peut aussi être exprimé sur le plan pupille sous la forme,

$$\eta_{01}(\sigma) = \frac{|c_{01}|^2(\sigma)}{\|\widetilde{e_{\text{in}}}\|^2(\sigma)}. \quad (5.4)$$

La théorie du couplage électromagnétique monomode a été formulée dans un contexte d'optique "déterministe". Il nous faut adapter le langage au cadre des ondes aléatoires stationnaires de la théorie de la cohérence partielle (c.f chapitre 4), pour in fine étudier comment se propage la cohérence partielle au sein un interféromètre fibré et faire l'articulation avec le théorème de Zernike-Van-Cittert. Il est nécessaire d'étudier le couplage électromagnétique d'un signal polychromatique².

5.1.1 Modes géométriques

Le filtrage modal fige la structure spatiale transverse et la phase du champ électromagnétique guidé. Dans la fibre ce dernier est donné par le champ guidé $e_{01} \exp(i\beta_{01}L)$, L étant la distance parcourue dans le guide. En sortie de guide monomode on peut traiter la propagation du plan de sortie des guides jusqu'au détecteur par le truchement d'un "boîte noire" (c.f. Fig. 5.1), qui ne va réaliser qu'une transformation purement *géométrique* du mode guidé. Cette transformation peut être décrite comme,

$$c_{01} e_{01} \exp i\beta_{01}L \rightarrow \underbrace{c_{01} \sqrt{\kappa_{01}}}_{c_{01}} \underbrace{\exp i\beta_{01}L G_{01}}_{G_{01}} \quad \|G_{01}\| = 1 \quad (5.5)$$

où apparaît κ_{01} une transmission photométrique incluant toutes les pertes photoniques à l'exclusion de celles dues au couplage monomode proprement dit. G_{01} est le mode transformé normalisé imagé sur le détecteur final de phase décrivant la propagation en espace libre externe autre que celle dans le guide. Sans perdre aucune généralité, nous intégrerons toutes ces pertes photoniques dans la définition

¹Le produit scalaire euclidien sur le plan transverse à l'axe optique du guide est noté $|\cdot|$ et non $\langle \cdot | \cdot \rangle$ pour éviter toute confusion avec une moyenne temporelle ou d'ensemble notée $\langle \cdot \rangle$.

²Faute de quoi le théorème de Zernike Van-Cittert ne tient plus.

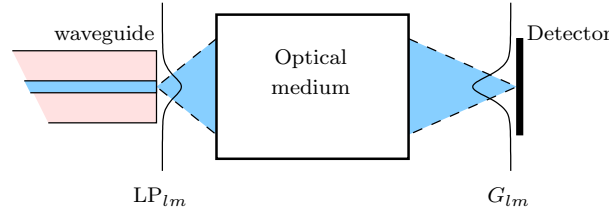


Fig. 5.1 – Transformation géométrique du mode fondamental e_{01} entre la sortie du guide et du détecteur.

de l'amplitude complexe couplée. Ce qui revient à traiter le milieu de propagation externe à la fibre comme un milieu de transmission unitaire. D'autre part nous intégrerons la phase de propagation dans la fibre dans la définition de la phase du mode géométrique imagé sur le plan de la détection. Si bien qu'en définitive la phase du mode géométrique normalisé ϕ_{01} représentera toute la propagation instrumentale statique dans le système fibré. Après filtrage modal, la notion de plan pupille ou plan-image perd son sens. Les coordonnées α' désignera une coordonnée angulaire sur le plan de la détection vue depuis la pupille de sortie du système. Nous utiliserons une coordonnée angulaire, mais celle-ci n'aura strictement aucune signification sur le ciel. C'est pourquoi nous la noterons α' pour décrire le plan de la détection final en terme d'angle et réserverons l'emploi de la notation usuelle α aux coordonnées angulaires optiquement conjuguées à celles de la source observée sur le ciel. De même nous réserverons la notation \mathbf{f} aux fréquences spatiales optiques définies sur le plan de Fourier de l'objet. Et les coordonnées \mathbf{f}' pour désigner les fréquences spatiales optiques codées sur le plan de la détection qui sont déconnectées de celles du plan de Fourier. Par conséquent, en appliquant la transformation géométrique au mode fondamental du guide, l'amplitude complexe monochromatique

$$e(\alpha', \sigma) = c_{01}(\sigma) G_{01}(\alpha', \sigma) \quad \|G_{01}\| = 1 \quad (5.6)$$

Je vais maintenant présenter l'étude détaillée de quelques transformations géométriques spécifiques.

Diffraction en espace libre

L'appendice A.1 rappelle quelques propriétés concernant la propagation des faisceaux Gaussiens en espace libre. La la figure de diffraction angulaire en champ lointain du mode fondamental est dérivée de celui-ci par une transformée de Fourier normalisée,

$$G_{01}(\alpha', \sigma) = -i \exp(2\pi i \sigma z) \sqrt{\frac{2}{\pi \theta_o(\sigma)^2}} \exp\left(-\frac{|\alpha'|^2}{\theta_o(\sigma)^2}\right). \quad (5.7)$$

α' est une coordonnée angulaire sur le détecteur, z est le chemin optique en espace libre et θ_o est le demi-angle de diffraction du faisceau gaussien. Les caractéristiques typiques du faisceau gaussien sont reportés sur la figure Fig. 5.2 à $\lambda = 2.2 \mu\text{m}$ pour une guide d'onde monomode de diamètre de coeur $10 \mu\text{m}$ Petrov et al. [valeur typique pour les fibres en silice d'AMBER; 80].

On peut toujours employer la figure diffraction en champ lointain du mode fondamental guidé comme le mode géométrique imagé sur le détecteur. C'est ce qui a été fait par Stuart Shaklan Shaklan & Roddier [93] en recombinaison interférométriquement les sorties de fibres optiques directement sur le détecteur (sans optique intermédiaire). L'avantage principal de ce design optique est sans doute éviter des pertes photoniques post-filtrage modal ainsi que d'éventuelles aberrations additionnelles. En tout

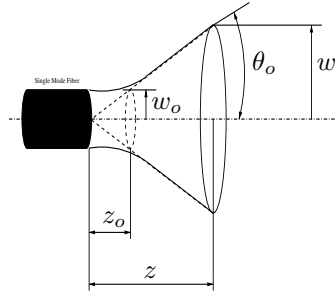
Gaussian beam characteristics	Values
	core radius, a ,
	$5 \mu\text{m}$
	wavelength, $\bar{\lambda}$,
	$2.2 \mu\text{m}$
	waist, w_o ,
	$5.50 \mu\text{m}$
	Rayleigh depth z_o ,
	$43.12 \mu\text{m}$
	divergence angle, θ_o ,
	$0.127 \text{ rad}, 14.6^\circ$

Fig. 5.2 – Caractéristiques du Faisceau gaussien de sortie d’AMBER pour une fibre de de diamètre $10\mu\text{m}$ à $\bar{\lambda} = 2.2\mu\text{m}$.

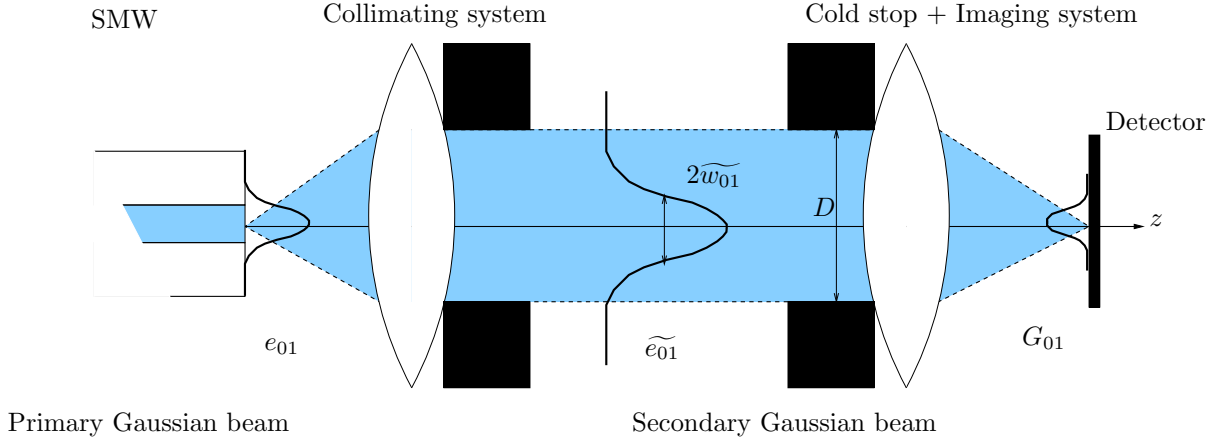


Fig. 5.3 – Collimation et stoppage du faisceau Gaussien.

point de recombinaison la phase *instrumentale statique* de l’interférogramme monochromatique issue de la recombinaison des modes géométriques est réduite à un piston différentiel auquel s’ajoute la modulation spatiale des franges, à la fréquence spatiale optique $\mathbf{f}'^{12} = \sigma \mathbf{b}^{12}$

$$\phi_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = \phi_{01}^1(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) - \phi_{01}^2(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = \underbrace{2\pi\sigma(z^1 - z^2)}_{\text{espace libre}} + \underbrace{2\pi\sigma \mathbf{b}^{12} \cdot \boldsymbol{\alpha}' + \beta_{01}^1(\sigma)L^1 - \beta_{01}^2(\sigma)L^2}_{\text{guide}} \quad (5.8)$$

Mais l’inconvénient majeur du design est qu’il requiert un “champ de vue” important sur le détecteur donc beaucoup de pixels à cause de la grande valeur de l’angle de diffraction θ_o du faisceau gaussien de sortie.

Collimation du faisceau

C’est pourquoi, dans la plupart des instruments tels que FLUOR ou AMBER, le faisceau gaussien est collimaté avant d’être imagé. La collimation est réalisée par un système optique dont l’effet peut être ramené à celui d’une lentille simple de focale équivalente F (voir Fig. 5.3).

Dans ce cas on peut montrer (c.f. Appendice (A.1)) que le faisceau gaussien après la correction de phase sphérique opérée par la lentille correspond à un champ lointain du mode fondamental se propageant comme une onde plane de profil transverse gaussien dans sa zone de Rayleigh de longueur infinie (voir Fig. 5.4) et de rayon de spot gaussien stationnaire donné par $\widetilde{w}_{01}(\sigma) = F.\theta_o(\sigma)$.

$$\widetilde{e}_{01}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) = -i \exp(2i\pi\sigma z) \sqrt{\frac{2}{\pi \widetilde{w}_{01}(\sigma)^2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{\widetilde{w}_{01}(\sigma)^2}\right) \quad (5.9)$$

with $z \geq L$

A la sortie de la collimation, le faisceau est imagé sur le détecteur. La figure de diffraction angulaire du champ étalée sur le plan de la détection résulte de la diffraction angulaire du faisceau collimaté sur la pupille de sortie puis stoppé par le système imageur. Les effets de troncature spatiale dus à la présence d'un stop ne peuvent pas être ignorés et le faisceau imagé n'est plus strictement gaussien. Le mode géométrique sur le plan image final est donné par la transformée de Fourier du faisceau collimaté stoppé,

$$G_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = -i\sigma \int \widetilde{e}_{01}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) s(\boldsymbol{\rho}) \exp(-i2\pi\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\alpha}') d\boldsymbol{\rho} \quad (5.10)$$

où $s(\boldsymbol{\rho}) = \Pi(\frac{2\boldsymbol{\rho}}{d})$ est la fonction “stop” de diamètre externe ($d = 40\text{mm}$ dans le cas d'AMBER). La transformée de Fourier d'une gaussienne tronquée peut être exprimée comme une série de fonctions de Bessel de première espèce, ce qui renvoie un mode géométrique de la forme,

$$G_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = -\frac{\exp(i\sigma z) \exp(-\gamma_s^2)}{\sqrt{1 - \exp(-2\gamma_s^2)}} \sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\theta_d^2}} (2\gamma_s)^{2p-1} \frac{J_{p+1}(\pi \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\theta_d})}{(\pi \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\theta_d})^{p+1}} \quad (5.11)$$

où $\gamma_s(\sigma) = d/2\widetilde{w}_L(\sigma)$ est le rapport de stop, le diamètre du stop exprimé en unités du diamètre de mode collimaté et $\theta_d(\sigma) = \frac{1}{\sigma d}$ est l'angle de diffraction caractéristique associé au stop. Selon l'Eq. (5.11), le profil final du mode géométrique est gouverné par le rapport de stop γ_s . Pour des rapports largement plus grands que l'unité les effets du stop sont négligeables et le profil du mode imagé est gaussien. Néanmoins, une telle description reste acceptable au voisinage de rapports unitaires, et l'on pourra en pratique remplacer le mode géométrique par son fit gaussien le plus proche (see Fig. 5.5).

L'approximation gaussienne du profil de mode exact donné in Eq. (5.11) est définie comme le profil gaussien de même flux et de même maximum, donc de même largeur équivalente.

$$G_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) \simeq \exp(i2\pi\sigma z) \sqrt{\frac{2}{\pi \theta_{01}(\sigma)^2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\alpha}'|^2}{\theta_{01}(\sigma)^2}\right)$$

with

$$\frac{\theta_{01}(\sigma)}{\theta_d(\sigma)} = \frac{2\gamma_s(\sigma)}{\pi} \sqrt{\frac{1 + \exp(-\gamma_s(\sigma))}{1 - \exp(-\gamma_s(\sigma))}} \quad (5.12)$$

Pour AMBER, le rapport de stop γ_s a été fixé en optimisant le flux partiellement intégré sur une région circulaire du plan de la détection correspondant respectivement à une rayon de $\frac{1}{2}\theta_d$, θ_d , and $2\theta_d$ (voir Fig. 5.6). Les trois exemples ont été développés pour montrer dans quel mesure le rapport de stop influence l'écart au profil purement gaussien. Dans le cas d'AMBER, le mode géométrique vont être échantillonnés sur une région de rayon angulaire θ_d est dans ce cas l'approximation est excellente. La modélisation gaussienne directe de l'onde porteuse monochromatique du signal guidé par une gaussienne peut effectivement permettre d'éviter des transformées de Fourier numériques

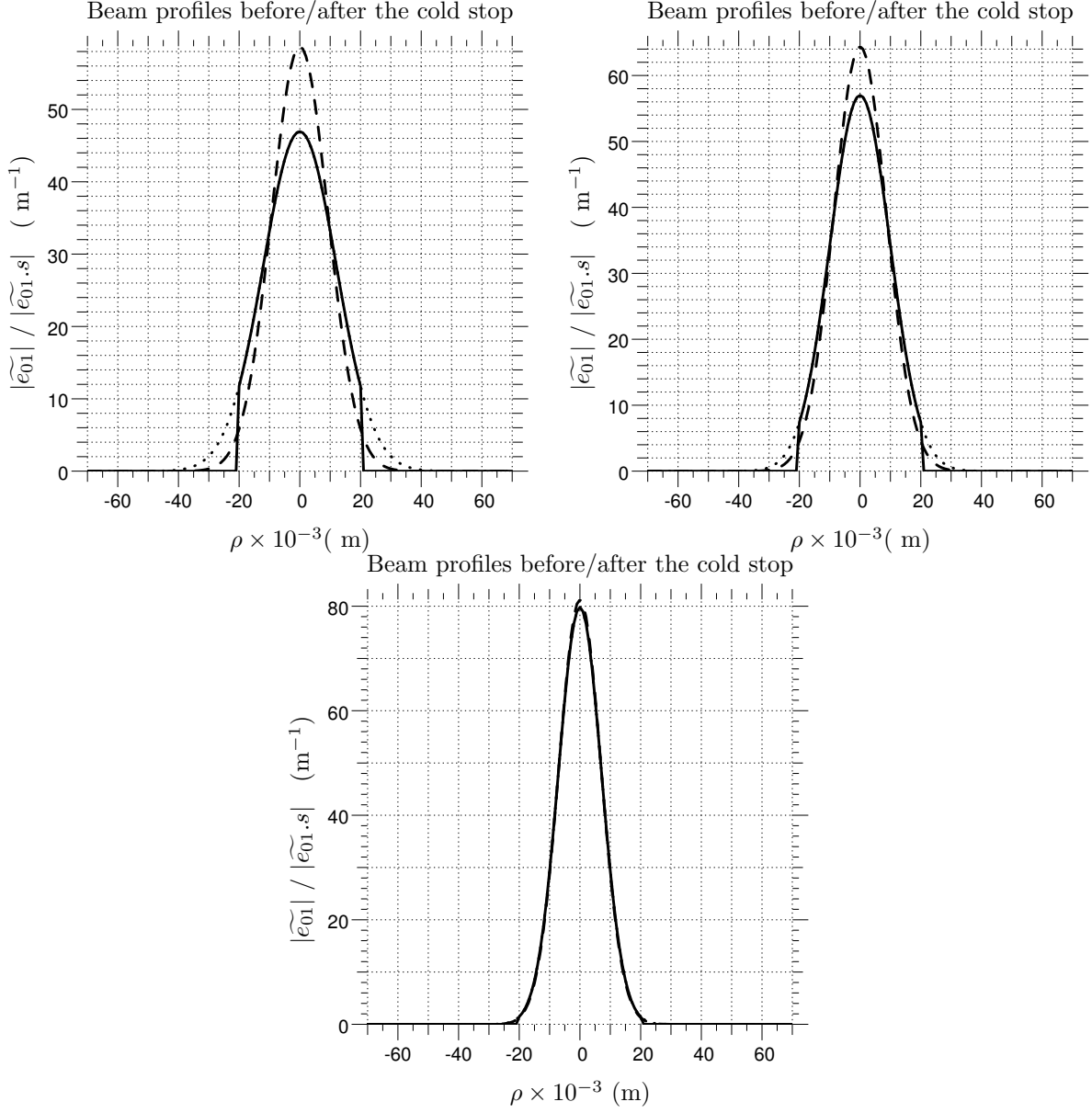


Fig. 5.4 – Pupilles de sorties stoppées avec un rapport de stop de gauche à $\gamma_s = 1.18, 1.43, 2$ menant à un diamètre de mode collimé $2w_L$ de resp. 85 %, 70 % and 50 % celui du stop pupillaire $d = 40\text{mm}$. Ligne tiretée : approximation Gaussienne (voir le texte pour plus de détails).

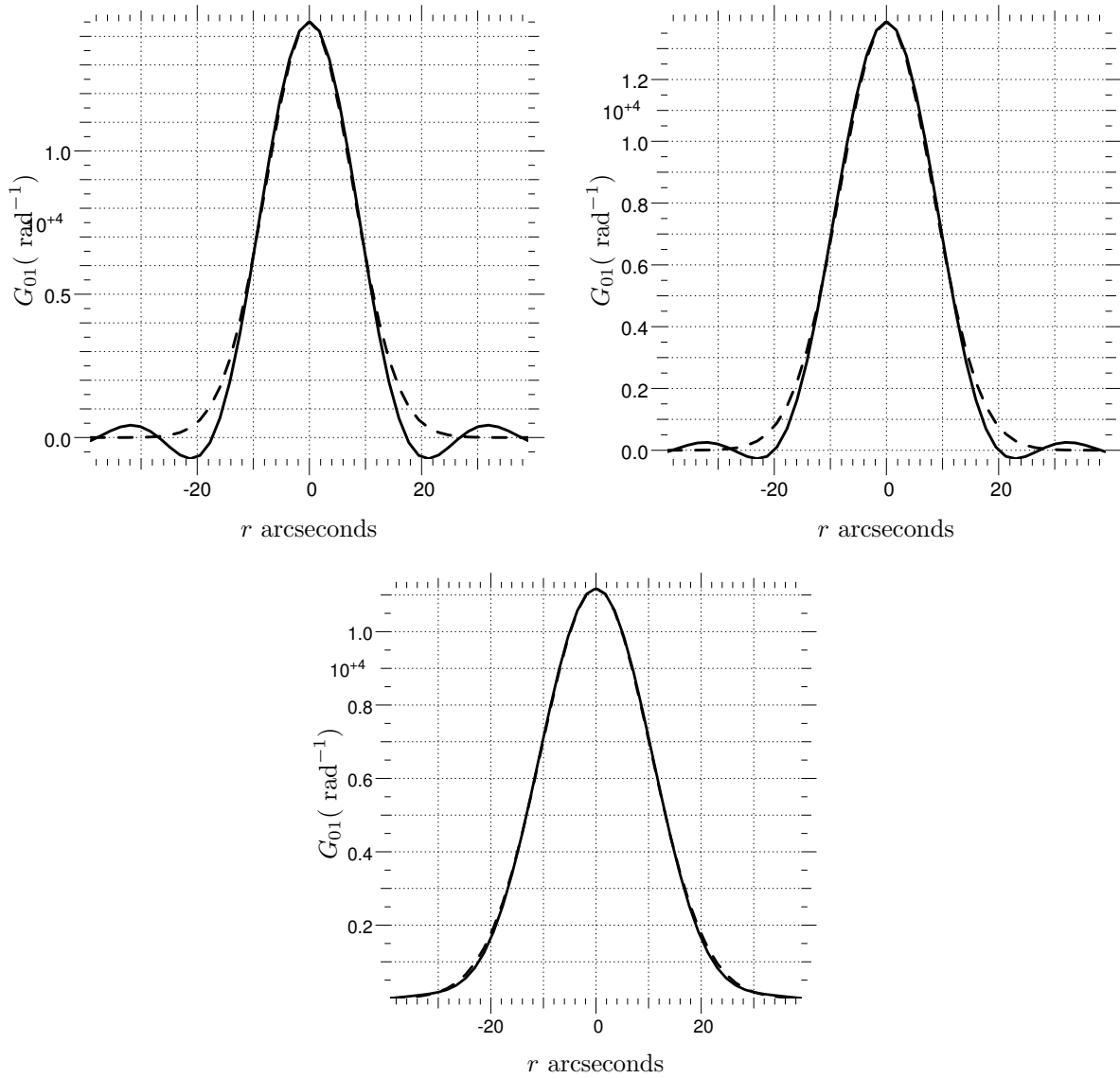


Fig. 5.5 – Mode géométrique imagé et son fit gaussien (ligne tiretée) pour un rapport de stop γ_s valant respectivement, de gauche à droite, **1.18**, **1.43**, and **2** et menant à un diamètre de mode collimé $2w_L$ de 85%, 70 % and 50 % celui du stop pupillaire $D = 40\text{mm}$.

inutiles dans le cadre d'un simulateur d'AMBER³. La transmission photométrique du système de collimation est facilement obtenue sous la forme, (voir Fig. 5.8),

$$\kappa_{01}(\sigma) = \sqrt{1 - \exp(-2\gamma_s(\sigma)^2)} \quad (5.13)$$

L'Eq. (5.11) retourne l'expression rigoureuse du mode géométrique imagé sur un canal photométrique d'AMBER lorsque les aberrations statiques situées en aval du filtrage modal sont négligeables (à l'exception des termes de pistons différentiels) Sous cette hypothèse, la phase instrumentale d'un

³L'anamorphose du signal pouvant alors être facilement prise en compte par une gaussienne bidimensionnelle

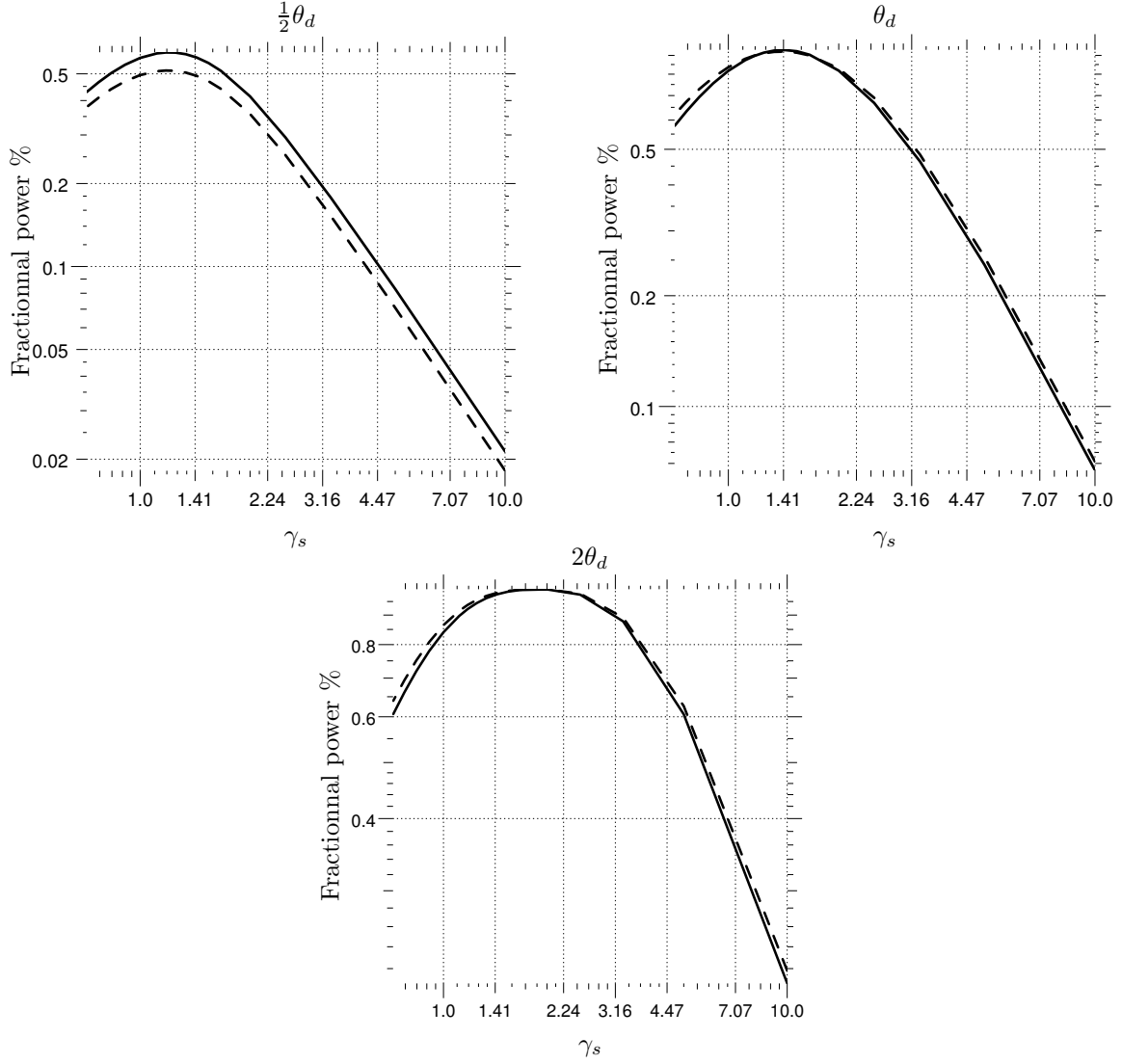


Fig. 5.6 – Optimisation du stop et flux intégré sur le détecteur. Le rapport de stop optimal est respectivement $\gamma_s = 1.18, 1.43, 2$ menant à un diamètre de mode secondaire $2w_L$ de resp. 85 %, 70 %, 50 % celui du stop $d = 40\text{mm}$. Ligne tiretée : approximation Gaussienne (voir le texte pour plus de détails).

interférogramme monochromatique issu de la recombinaison multiaxiale est toujours donnée par l'équation Eq. (5.8). Si tel n'est pas le cas, il faut prévoir une dépendance éventuelle de la différence de phase des modes géométriques en fonction du point de recombinaison (dépendant de l'aberration). La phase instrumentale la plus générale est de la forme,

$$\phi_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = \phi_{01}^1(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) - \phi_{01}^2(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = \underbrace{2\pi\sigma(z^1 - z^2) + 2\pi\sigma\mathbf{b}^{12} \cdot \boldsymbol{\alpha}' + \phi_{\text{sys}}^{12}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma)}_{\text{espace libre}} + \underbrace{\beta_{01}^1(\sigma)L^1 - \beta_{01}^2(\sigma)L^2}_{\text{guide}}. \quad (5.14)$$

où ϕ_{sys}^{12} résulte des aberrations éventuellement présentes sur la pupille de sortie interférométrique.

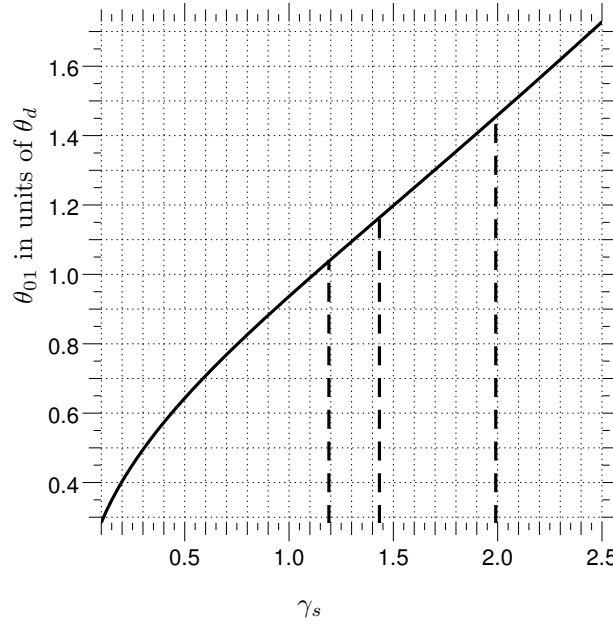


Fig. 5.7 – Taille du spot gaussien équivalent θ_{01} du mode géométrique imagé sur le détecteur en unités de rayon du premier anneau d’Airy θ_d (ligne pleine). Les lignes verticales correspondent aux valeurs optimisées du rapport de stop **optimized values of γ_s** (voir le texte pour plus de détails).

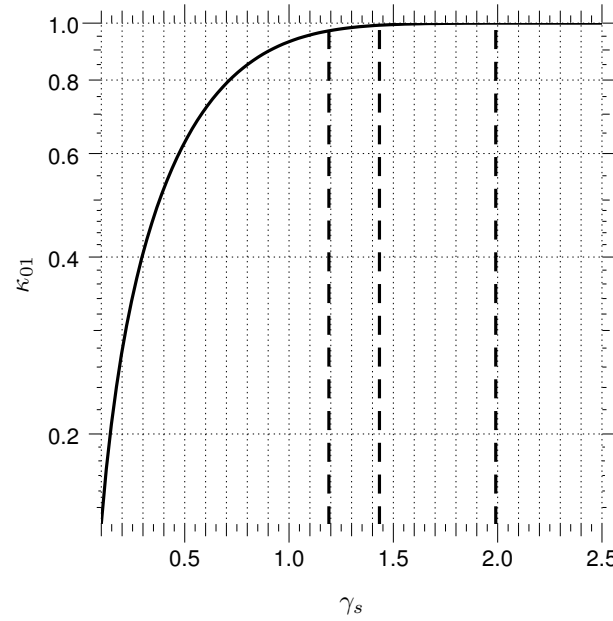


Fig. 5.8 – Pertes photoniques κ_{01} due au stop en fonction du rapport de stop γ_s (ligne pleine). lignes verticales correspondent aux valeurs optimisées du rapport de stop **optimized values of γ_s** (voir le texte pour plus de détails).

5.1.2 Intensité monomode

Nous avons défini la transformation géométrique du mode fondamental composante monochromatique. Fort de cette transformation géométrique, nous pouvons exprimer la représentation analytique du signal polychromatique guidé à l'instant $x = ct$ sur le plan de la détection, sous la forme générale.

$$V_{01}(\boldsymbol{\alpha}', x) = 2 \int_0^\infty c_{01}(\sigma) G_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) \exp 2i\pi\sigma x d\sigma. \quad (5.15)$$

G_{01} est le mode géométrique normalisé en flux finalement imagé sur le détecteur. Rappelons que toutes les pertes photoniques du système sont incluses dans la définition du coefficient de couplage c_{01} . La densité spectrale de puissance du signal définie par la relation Eq. (4.13) du chapitre 4 est donnée par la grandeur,

$$\mathcal{G}_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle |c_{01}(\sigma)|^2 \rangle}{2X} |G_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma)|^2, \quad (5.16)$$

où $\langle . \rangle$ est une moyenne d'ensemble ou temporelle par ergodicité sur X une échelle de temps plus grande que le temps de cohérence caractéristique de la radiation $l_c = \frac{1}{\delta\sigma}$. L'intensité lumineuse monomode est simplement définie par (c.f. Eq. (4.12),

$$I_{01}(\boldsymbol{\alpha}') = \langle |V_{01}(\boldsymbol{\alpha}', x)|^2 \rangle = \int_0^\infty 4 \mathcal{G}_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) d\sigma. \quad (5.17)$$

Le *flux monomode* transmis au détecteur par unité de bande passante est donc,

$$f_{01}(\sigma) = \int_0^\infty 4 \mathcal{G}_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) d\boldsymbol{\alpha}' = 4 \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle |c_{01}(\sigma)|^2 \rangle}{2X}, \quad (5.18)$$

Nous avons utilisé le fait que le mode géométrique imagé sur le détecteur est normalisé $\|G_{01}\|^2 = 1$. Dans le cas particulier quasi-monochromatique de nombre d'onde $\bar{\sigma}$ de largeur de bande $\delta\sigma$ telle que $\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}} \ll 1$ l'intensité devient,

$$I_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = f_{01}(\bar{\sigma}) \delta\sigma |G_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \bar{\sigma})|^2. \quad (5.19)$$

Le profil d'intensité normalisé en flux,

$$H_{01}(\boldsymbol{\alpha}') = |G_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma)|^2, \quad (5.20)$$

sera qualifié d'*onde porteuse photométrique*. Ce profil se déduit du mode géométrique. Il ne dépend que du design optique, c'est un profil *déterministe*. Nous l'avons normalisé en flux (c.f. Eq. (5.6)),

$$\int H_{01}(\boldsymbol{\alpha}') d\boldsymbol{\alpha}' = 1. \quad (5.21)$$

Parallèlement au signal de sortie, la représentation analytique du signal imagé sur la tête du guide est définie par,

$$V_{\text{in}}(\boldsymbol{\alpha}, x) = 2 \int_0^\infty e_{\text{in}}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) \exp 2i\pi\sigma x d\sigma, \quad (5.22)$$

de densité spectrale associée,

$$\mathcal{G}_{\text{in}}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle |e_{\text{in}}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma)|^2 \rangle}{2X}, \quad (5.23)$$

d'intensité,

$$I_{\text{in}}(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^\infty 4 \mathcal{G}_{\text{in}}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\sigma, \quad (5.24)$$

et de flux par unité de bande passante optique,

$$f_{\text{in}}(\sigma) = \int 4 \mathcal{G}_{\text{in}}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\boldsymbol{\alpha} = 4 \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle \|e_{\text{in}}(\sigma)\|^2 \rangle}{2X}, \quad (5.25)$$

L'extension de la définition du taux de couplage monomode dans le cadre des signaux aléatoires polychromatiques est immédiate. On peut l'exprimer comme la transmission du système fibré,

$$\eta_{01}(\sigma) = \frac{f_{01}(\sigma)}{f_{\text{in}}(\sigma)} = \frac{\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle |c_{01}(\sigma)|^2 \rangle}{2X}}{\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle \|e_{\text{in}}(\sigma)\|^2 \rangle}{2X}} \quad (5.26)$$

Pour faire le lien avec le théorème de Zernike-Van-Cittert, on transposera les expressions des flux des densités spectrales et des flux par unité de bande passante optique sur le plan de la pupille d'entrée du système d'injection via (c.f. Eq. (5.3)) les égalités de Parseval suivantes,

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle |c_{01}(\sigma)|^2 \rangle}{2X} &= \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle |\widetilde{e}_{\text{in}}(\sigma)|^2 \rangle}{2X} \\ \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle \|e_{\text{in}}(\sigma)\|^2 \rangle}{2X} &= \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle |\widetilde{e}_{\text{in}}(\sigma)|^2 \rangle}{2X}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nous allons entreprendre cette transposition. Auparavant, nous allons définir dans le prochain paragraphe la pupille effective de l'ensemble optique constitué du système d'injection et guide d'onde.

5.1.3 Pupille effective

Lorsque l'on va chercher à exprimer le taux de couplage à l'aide de ces grandeurs et d'une transformée de Fourier normalisée permettant de passer sur le plan de la pupille d'entrée, il va apparaître une pondération de la fonction pupille par la paire de Fourier du mode fondamental du guide. Cette pondération de la pupille éclairée en retour inverse par le mode fondamental du guide, nous l'appellerons *pupille effective* et la désignerons par P_{01} . Mathématiquement, elle se construit comme une fonction proportionnelle au produit,

$$P_{01}(\sigma) \propto P(\sigma) \widetilde{e}_{01}^*(\sigma) \quad (5.28)$$

On peut choisir une normalisation particulière de la pupille effective. Cette normalisation est telle que la pupille effective vérifie l'égalité,

$$|P_{01}(\sigma)| \mid 1 = \|P_{01}(\sigma)\|^2, \quad (5.29)$$

une relation vérifiée par la fonction pupilles usuelles (non pondérée) P et qui n'est autre que leur surface *géométrique* S . Cette relation détermine complètement la surface de la pupille effective en conditions non turbulentes et nous l'appellerons, *surface effective* et la désignerons par $\overline{S}_{01}(\sigma)$. Détaillons l'expression de la pupille effective dans l'approximation gaussienne du mode fondamental. La diffraction en espace libre des faisceaux gaussiens a déjà été extensivement décrite dans la littérature. Je renvoie donc le lecteur à l'annexe A.1 pour de plus amples informations, à ce sujet. Le champ lointain du mode fondamental de la fibre est gaussien. Au loin, le col du faisceau gaussien de diamètre du spot gaussien $2\widetilde{w}_o$ s'élargit linéairement en suivant le cône de diffraction de la fibre. Sur la pupille d'entrée, le rapport entre le diamètre de mode gaussien et le diamètre externe D de la pupille du télescope est donné par,

$$\gamma_{\text{mod}}(\sigma) = \frac{D}{2\widetilde{w}_o(\sigma)} = \frac{m_o(\sigma)}{F/D} \quad (5.30)$$

où F est la focale équivalente du système d'injection dans le guide et m_o l'ouverture numérique du guide d'onde, c.f. Fig. 5.9. Nous avons vu que pour un nombre d'onde donné et une obscuration centrale donnée, ce rapport est déterminé à l'optimisation du couplage électromagnétique d'une source ponctuelle sur le mode fondamental du guide c.f. (chapitre 3). Le mode normalisé en flux sur le plan-pupille est,

$$\widetilde{e}_{01}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi \widetilde{w}_o(\sigma)^2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{\widetilde{w}_o(\sigma)^2}\right), \quad (5.31)$$

Si l'on considère une fonction pupille de la forme,

$$P(\boldsymbol{\rho}) = \Pi\left(\frac{2\boldsymbol{\rho}}{D}\right) - \Pi\left(\frac{2\boldsymbol{\rho}}{\gamma_{\text{obs}} D}\right) \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \gamma_{\text{obs}}) \quad (5.32)$$

de rapport linéique d'obscuration $\frac{d}{D} = \gamma_{\text{obs}}$, de diamètre externe D , de surface collectrice surface S and alors la pupille effective satisfaisant à l'équation Eq. (5.29),

$$|P_{01}| = \frac{2}{\sqrt{1 - \gamma_{\text{obs}}^2}} \frac{P(\boldsymbol{\rho}) \exp\left(-4\gamma_{\text{mod}}^2 \frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{D^2}\right)}{\exp(-\gamma_{\text{obs}}^2 \gamma_{\text{mod}}^2) + \exp(-\gamma_{\text{mod}}^2)}. \quad (5.33)$$

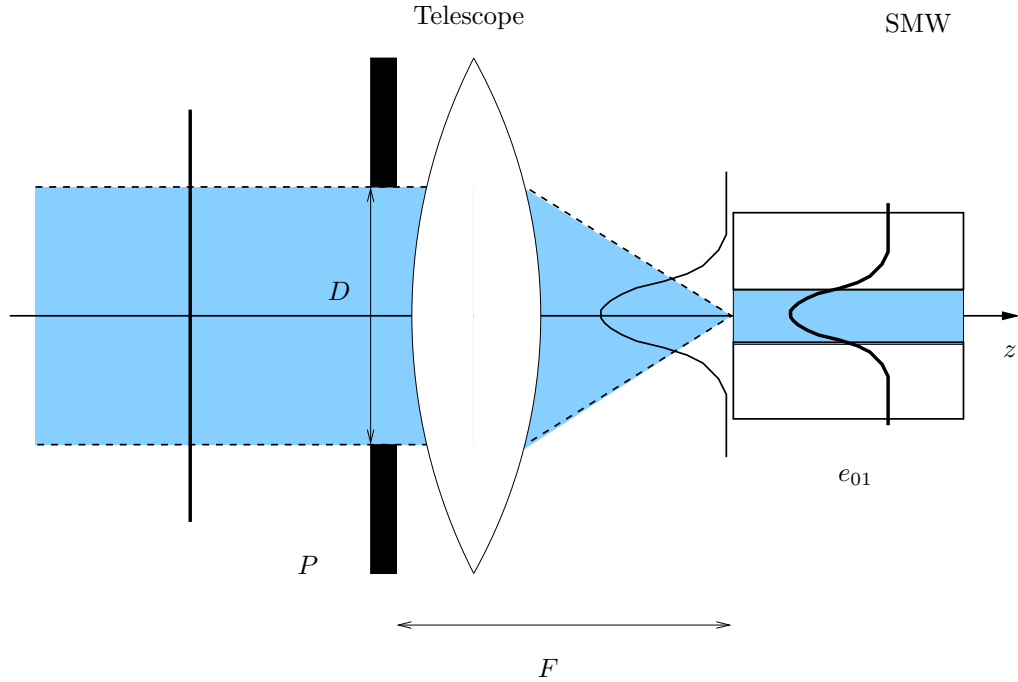


Fig. 5.9 – Géométrie de l'injection sur la tête de fibre.

La pupille effective est représentée sur la figure Fig.5.10, pour un Télescope Auxiliaire du VLTI à la longueur d'onde de $\lambda = 2 \mu\text{m}$ dont le taux de couplage monomode sur une source ponctuelle optimisé. Avec la normalisation choisie Eq. (5.29), le rapport de la surface effective idéale à la surface du télescope,

$$\frac{\overline{S}_{01}}{S} = \frac{2}{\gamma_{\text{mod}}^2(1 - \gamma_{\text{obs}}^2)} \frac{\exp(-\gamma_{\text{obs}}^2 \gamma_{\text{mod}}^2) - \exp(-\gamma_{\text{mod}}^2)}{\exp(-\gamma_{\text{obs}}^2 \gamma_{\text{mod}}^2) + \exp(-\gamma_{\text{mod}}^2)} \quad (5.34)$$

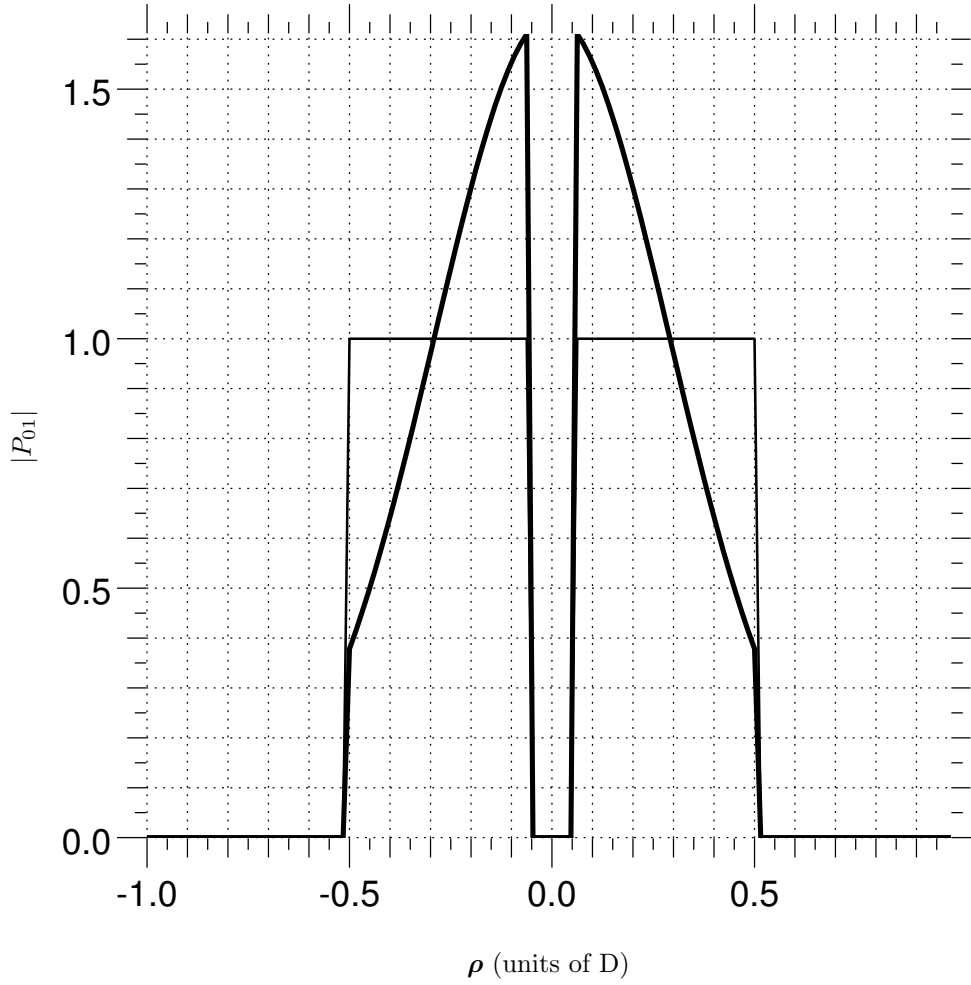


Fig. 5.10 – Pupille effective pondérée par le mode fondamental de la fibre $|P_{01}|$ pour un Télescope Auxiliaire du VLTI ($\gamma_{\text{obs}} = 1\%$, $\gamma_{\text{mod}} = 1.213$) Le profil fin correspond au cas limite où un trou infiniment fin sert de filtre spatial.

Les variations de ce rapport en fonction de γ_{mod} sont représentées sur la figure Fig.5.11, pour un Télescope Auxiliaire du VLTI à la longueur d'onde de $\lambda = 2 \mu\text{m}$ dont le taux de couplage monomode sur une source ponctuelle optimisé.

5.1.4 Lobe d'antenne photométrique

On peut voir le système fibré comme une antenne monomode, similaire à celle des radio-astronomes. Le lobe d'antenne du système fibré sera défini comme la tâche de diffraction de la pupille effective. A cette tâche de diffraction, on peut associer une fonction de transfert optique, définie par l'autocorrélation spatiale de la pupille effective. Pour la fréquence spatiale optique $\mathbf{f} = \sigma \boldsymbol{\rho}$, la fonction de transfert effective du lobe s'écrit,

$$T_{01}(\mathbf{f}, \sigma) = \frac{(P_{01} \star P_{01})(\boldsymbol{\rho} = \sigma^{-1} \mathbf{f})}{\|P_{01}(\sigma)\|^2} \quad (5.35)$$

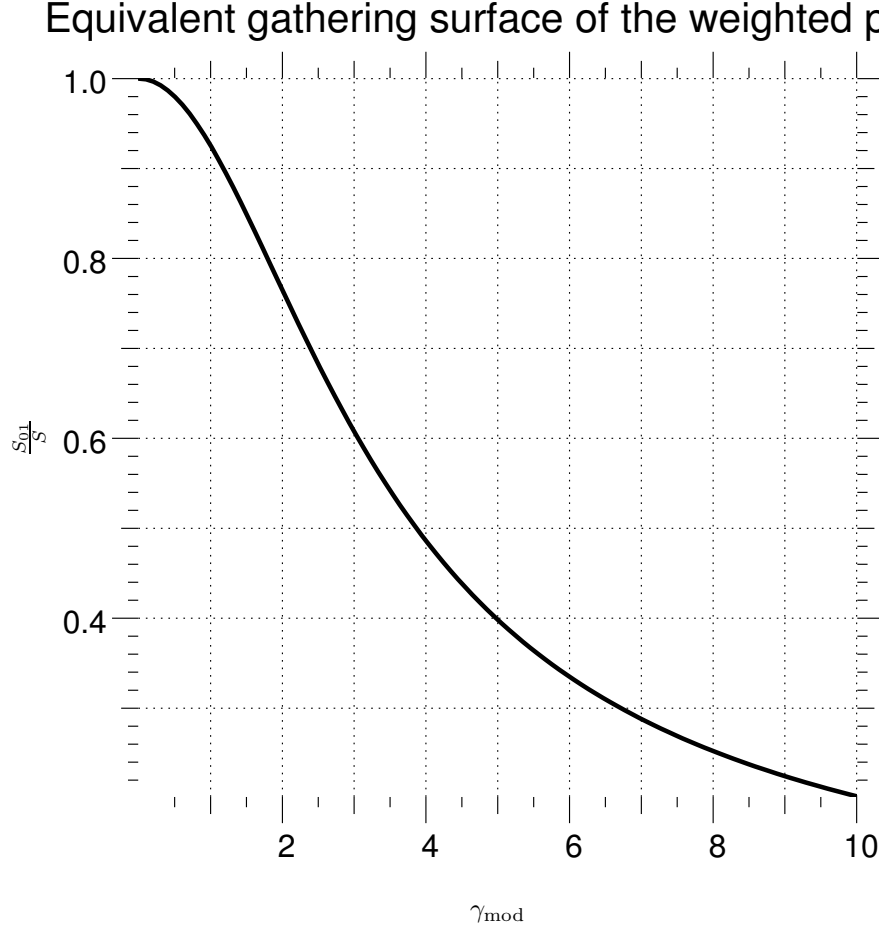


Fig. 5.11 – Surface effective S_{01} de la pupille effective P_{01} rapportée à la surface du d'un Telescope Auxiliaire (AT) du VLTI. $\gamma_{\text{obs}} = 1\%$ comme fonction du rapport d'injection γ_{mod} . L'injection optimale $\gamma_{\text{mod}} = 1.213$ la surface effective est 91.36% celle de AT. Le cas limite où un trou infiniment fin sert de filtre spatial $S_{01} = S$.

Cette fonction est normalisée à l'origine des fréquences spatiales. Le lobe d'antenne est simplement la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert optique,

$$L_{01}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) = \int T_{01}(\mathbf{f}, \sigma) \exp(2i\pi \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{f}) d\mathbf{f} \quad (5.36)$$

Il est normalisé en flux, i.e,

$$\int L_{01}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\boldsymbol{\alpha} = 1 \quad (5.37)$$

Provenant de l'autocorrélation spatiale de la pupille effective, il est à valeur réelle (La fonction de transfert du lobe d'antenne est à symétrie hermitienne, i.e $T_{01}(-\mathbf{f}, \sigma) = T_{01}^*(\mathbf{f}, \sigma)$). Le lobe de diffraction et la fonction de transfert effective de l'antenne monomode sont représentés sur les figures Fig. 5.12 et Fig. 5.13 respectivement. Si les opticiens normalisent le lobe en flux, les radio-astronomes caractérisent les propriétés angulaires de leurs antennes à partir du lobe d'antenne normalisé à sa valeur maximale. Le lobe normalisé permet de définir le champ de vue du faisceau sur le ciel,

$$\Omega_{01}(\sigma) = \int \frac{L_{01}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma)}{L_{01}(\mathbf{0}, \sigma)} d\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{L_{01}(\mathbf{0}, \sigma)} \quad (5.38)$$

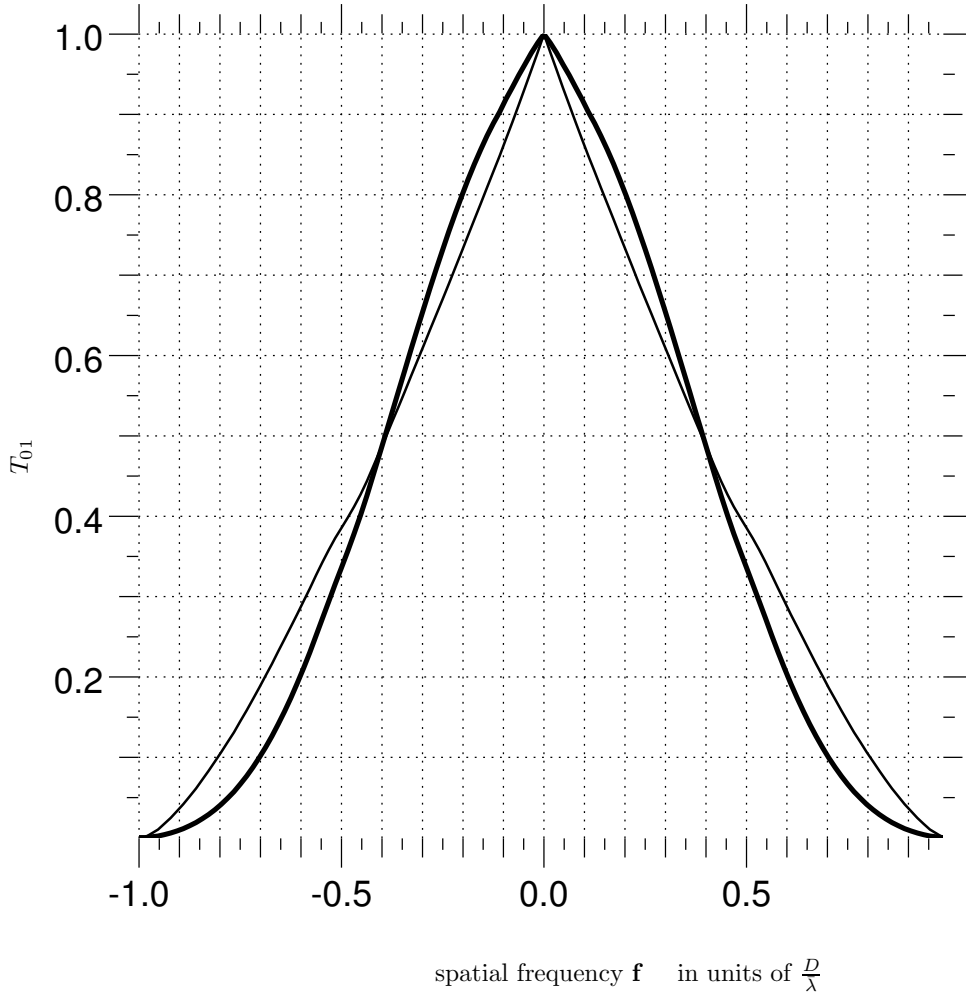


Fig. 5.12 – Lobe d’antenne sur le plan de Fourier T_{01} adimensionné à la fréquence spatiale d’un AT du VLTI défini par un rapport d’obscurité $\gamma_{\text{obs}} = 10\%$, et un rapport d’injection $\gamma_{\text{mod}} = 1.2$. Le profil fin correspond au cas limite où un trou infiniment fin sert de filtre spatial (Fonction de Transfert Optique du télescope usuelle).

Nous généraliserons la notion de surface effective dans n’importe quelles conditions d’observation (turbulentes ou non) à partir de la relation,

$$\Omega_{01}(\sigma) \cdot S_{01}(\sigma) = \sigma^{-2} = \lambda^2 \quad (5.39)$$

En combinant les équations Eq. (5.39), Eq. (5.38), Eq. (5.35), on déduira que la surface effective de l’antenne se calcule pour une pupille quelconque via la relation,

$$S_{01}(\sigma) = \frac{|P_{01}(\sigma)|^2}{\|P_{01}(\sigma)\|^2} = \int T_{01}(\mathbf{f} = \sigma \boldsymbol{\rho}, \sigma) d\boldsymbol{\rho} \quad (5.40)$$

Le lobe d’antenne qu’il soit normalisé en flux ou à son maximum est indépendant de toute normalisation choisie pour la pupille effective. Il en va de même en ce qui concerne le champ de vue Ω_{01} et la surface effective S_{01} . la surface effective est la surface de la pupille effective pour laquelle l’étendue de faisceau est monomode. Clairement la surface effective de l’antenne est rattachée à ses propriétés de résolution angulaire. Cette dernière exprimée en unités de longueur d’onde chiffre le

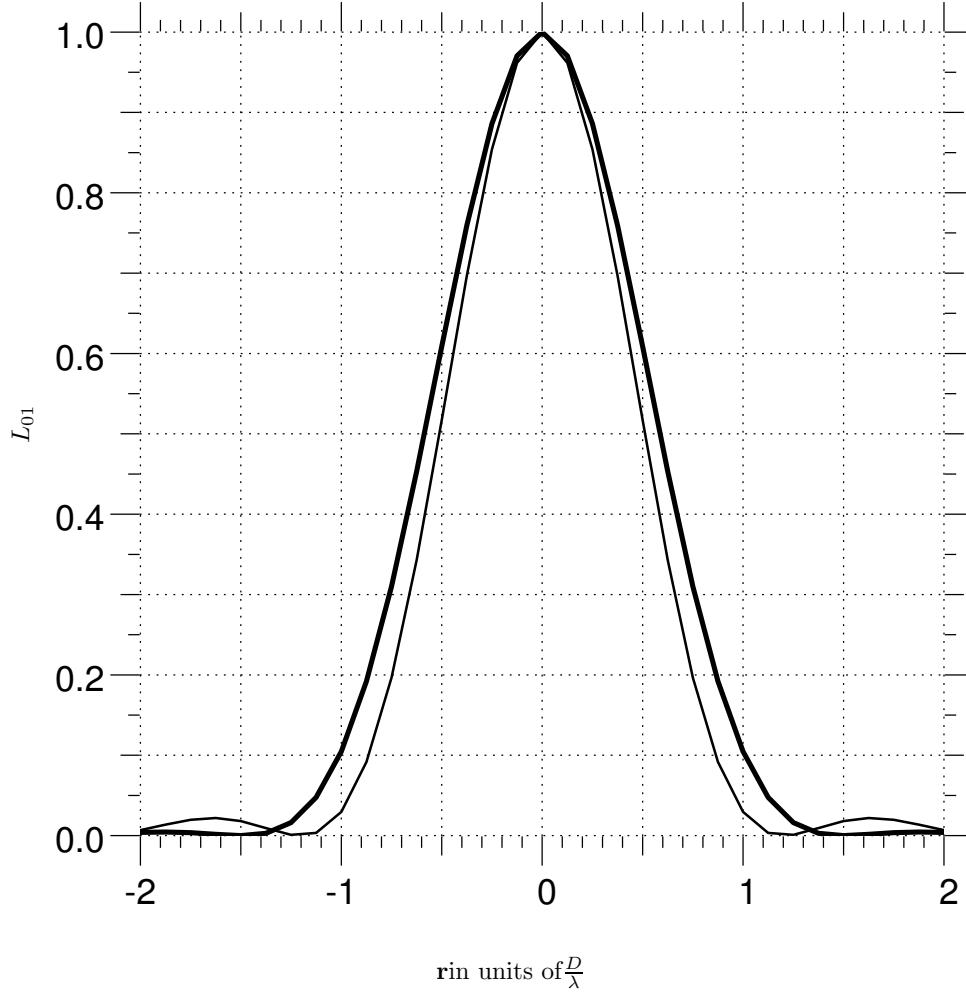


Fig. 5.13 – Lobe d’antenne sur le plan image normalisé à son maximum pour AT de rapport d’obscuration $\gamma_{\text{obs}} = 10\%$, de rapport d’injection $\gamma_{\text{mod}} = 1.2$. Le profil fin correspond au cas limite où un trou infiniment fin sert de filtre spatial (Tâche d’Airy du télescope).

pouvoir de résolution angulaire de l’antenne. Elle sera affectée par la turbulence atmosphérique. La surface de la pupille effective définie au sens de la relation E.q. (5.29) $\overline{S_{01}}$ s’identifie pleinement à la surface effective S_{01} au sens de l’équation E.q. (5.39), sans turbulence atmosphérique, pour le couplage électromagnétique monomode d’une source ponctuelle. La normalisation particulière qui a été retenue pour décrire la pupille effective dans le cas idéal est telle que sa surface effective idéale⁴ s’obtienne par une intégration linéaire de la fonction pupille comme dans le cas des pupilles usuelles non pondérées, plutôt que par une intégration quadratique de la fonction pupille. Cette normalisation s’avèrera utile pour extrapoler par une analogie directe les résultats de la correction adaptative partielle au sens de la pupille pondérée par le filtre modal.

⁴Dans la suite on entendra par cas idéal le contexte expérimental relatif à l’observation d’une source ponctuelle (non résolue par une pupille individuelle, en laboratoire, i.e sans turbulence atmosphérique. Les grandeurs associées seront surmontées d’un trait horizontal.

5.1.5 Section efficace

D'un point de vue énergétique, les radio-astronomes définissent la section efficace d'une antenne comme la surface du télescope équivalent qui éclairée par une source ponctuelle permettrait d'obtenir un nombre équivalent au nombre de photons délivré à la sortie de l'antenne. Cette surface équivalente d'un point de vue énergétique est à rapprocher d'une section efficace de la physique des particules. Par définition la section efficace du couplage monomode sera,

$$\frac{\Sigma_{01}(\sigma)}{S} = \eta_{01}(\sigma) \quad (5.41)$$

ou η_{01} est l'efficacité de couplage monochromatique d'une *source ponctuelle* dans le guide d'onde. Les radio-astronomes l'appellent efficacité de faisceau. La surface efficace ne dépend pas de la normalisation de la pupille effective. En utilisant l'expression du taux de couplage monochromatique dans le cas idéal (non turbulent) pour une source ponctuelle (Eq. (5.42)), la section efficace idéale est donnée par,

$$\frac{\overline{\Sigma_{01}}}{S} = \frac{2[\exp(-\gamma_{\text{obs}}^2 \gamma_{\text{mod}}^2) - \exp(-\gamma_{\text{mod}}^2)]^2}{\gamma_{\text{mod}}^2 (1 - \gamma_{\text{obs}}^2)} \quad (5.42)$$

Dans le cas idéal on constate que le rapport entre la surface effective et la surface efficace de l'antenne que constitue le système fibré monomode n'est pas unitaire,

$$\frac{\overline{\Sigma_{01}}}{\overline{S_{01}}} = [\exp(-2\gamma_{\text{obs}}^2 \gamma_{\text{mod}}^2) - \exp(-2\gamma_{\text{mod}}^2)] \quad (5.43)$$

La section efficace est tracée sur les figures Fig. 5.14 pour un Télescope Auxiliaire du VLTI à la longueur d'onde de $\lambda = 2 \mu\text{m}$. Le maximum $\max \eta_{01} = 79.44 \%$ (c.f. Fig. 5.14) est obtenu pour une valeur a de $\gamma_{\text{mod}} = 1.213$ c'est à dire pour un diamètre de mode $2\widetilde{w}_o$ valant 90.8% celui de la pupille d'injection. Pour l'antenne monomode que constitue la fibre, il convient de distinguer la notion de surface effective de la notion de section efficace d'antenne. La surface effective est rattachée aux propriétés angulaires du lobe d'antenne sur le ciel c'est par définition la surface pour laquelle l'étendue de faisceau vaut λ^2 . Exprimée unité de longueur d'onde au carré, c'est tout simplement le pouvoir de résolution angulaire du faisceau. L'autre, la section efficace mesure les propriétés de transmission photométrique du système fibré. C'est la surface collectrice du télescope équivalent qui transmettrait le même nombre de photons que le système à l'observation d'un point source. Pour un lobe d'antenne donné la surface effective qui définit une étendue de faisceau monomode, n'est pas nécessairement égale à celle qui collecterait le nombre de photons transmis par la fibre.

Les paramètres optogéométriques de l'injection sont réglés en laboratoire de manière à optimiser la section efficace (le flux transmis) pour la longueur d'onde centrale du rayonnement que l'on souhaite étudier, et ce dans l'objectif de gagner le plus possible en sensibilité. Une fois l'optimisation du taux de couplage (de la section efficace) réalisée, la géométrie de la pupille effective est déterminée, il en va de même en ce qui concerne le lobe d'antenne et la surface effective dans le cas idéal. Pour un Télescope Auxiliaire du VLTI, l'optimisation du couplage au centre de chaque bande spectrale renvoie une surface efficace valant 79% la surface géométrique de l'antenne, tandis que la surface équivalente vaut 91% la surface géométrique de l'antenne.

Les dépendances chromatiques de la surface effective et de la section efficace de l'antenne résultent de la composition de leur lois de variation en fonction du diamètre de mode fondamental sur la pupille (mesurée par le rapport γ_{mod} c.f tracés présentés sur les figures Fig. 5.14, Fig. 5.11) et de la loi de variation spectrale du diamètre du mode fondamental $\gamma_{\text{mod}}(\sigma)$. Cette dernière dépendance peut-être

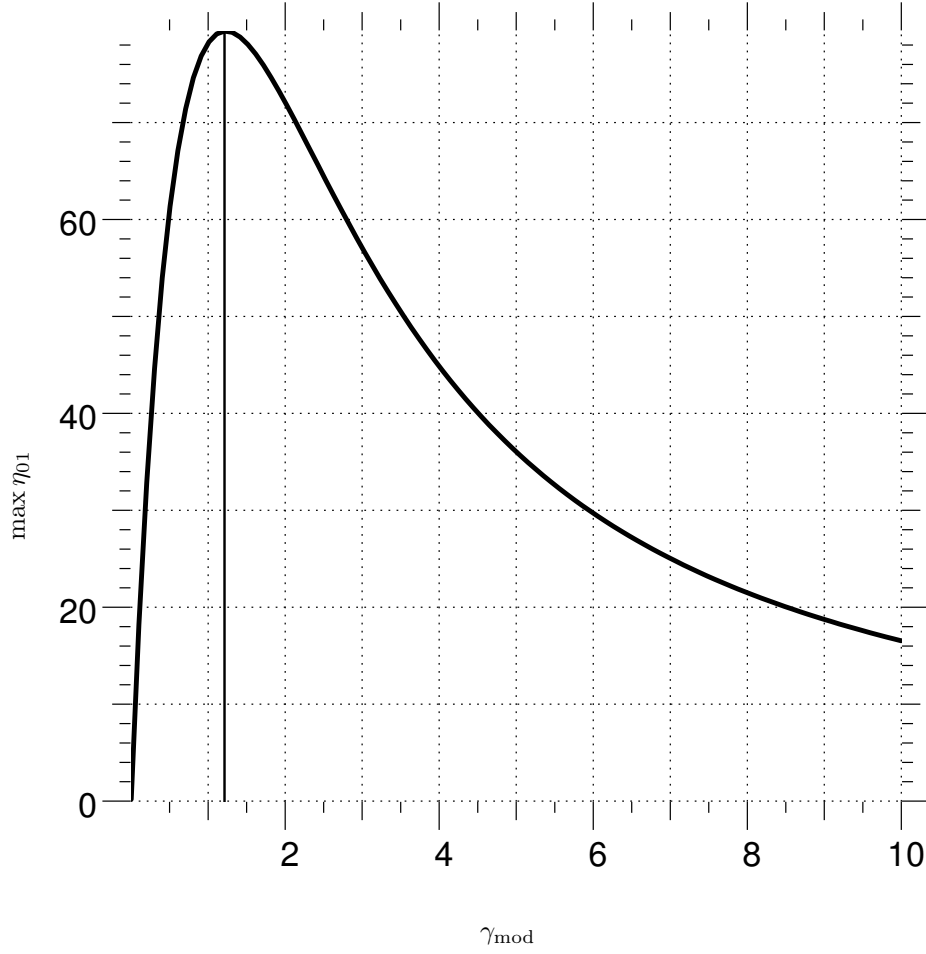


Fig. 5.14 – Taux de couplage sur le mode fondamental d’un guide d’onde monomode pour une source non résolue en conditions non turbulentes, pour un AT du VLTI (1.8m) de rapport d’obscurité $\gamma_{\text{obs}} = 10\%$. Le taux de couplage est tracé en fonction du rapport d’injection γ_{mod} mesurant la taille du diamètre pupillaire en unités du diamètre du mode fondamental sur la pupille. L’origine du graphique correspond au cas limite où un trou infiniment fin sert de filtre spatial.

calculée exactement si l’on connaît les variations spectrales du paramètre du gradient d’indice de réfraction dans le guide. On admet souvent que l’ouverture numérique du guide m_o est inversement proportionnelle au nombre d’onde soit, $\gamma_{\text{mod}} \propto \sigma^{-1}$.

5.1.6 Propagation de la cohérence partielle

Le flux monomode guidé et le flux imagé sur la tête du guide d’onde peuvent être exprimés sur le plan de la pupille d’entrée du système d’injection lumineuse. Sur ce plan, la composante du signal monochromatique d’entrée est factorisable sous la forme,

$$\widetilde{e}_{\text{in}}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) = P(\boldsymbol{\rho}, \sigma) e_{\star}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) \quad (5.44)$$

où P de surface collectrice, désigne la fonction pupille d'entrée du système de transmission unitaire⁵ de surface collectrice S et e_* la composante monochromatique stellaire. Le flux injecté sur la tête de fibre par unité de bande passante optique n'est autre que le flux stellaire collecté par la surface du télescope par unité de bande passante optique et s'écrit,

$$f_{\text{in}}(\sigma) = 4 \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle \|e_{\text{in}}(\sigma)\|^2 \rangle}{2X} = SI_*(\sigma), \quad (5.45)$$

où $I_*(\sigma)$ est l'éclairement stellaire par unité de bande passante optique, invariante spatialement sur le plan pupille et qui se déduit de la densité spectrale de la source \mathcal{G} via la relation (c.f. Eq. (4.39).),

$$I_*(\sigma) = 4 \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle |e_*(\boldsymbol{\rho}, \sigma)|^2 \rangle}{2X} = 4\mathcal{G}(\sigma) = \int B(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\boldsymbol{\alpha}. \quad (5.46)$$

B est la distribution de brillance spectro-angulaire de la source observée. Parallèlement, en injectant l'Eq. (5.44) dans la définition plan-pupille du flux guidé par unité de bande passante optique (Eq. (5.18) and Eq. (5.27)) il vient,

$$f_{01}(\sigma) = \|Pe_{01}^*\|^2 \int 4\mathcal{G}_{12}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) T_{01}(\mathbf{f} = \sigma\boldsymbol{\rho}, \sigma) d\boldsymbol{\rho}, \quad (5.47)$$

où T_{01} est la fonction de transfert normalisée de la pupille effective éclairée en retour inverse par le mode fondamental du guide (c.f Eq. (5.35)) et où \mathcal{G}_{12} est la densité spectrale *mutuelle* de la source sur le plan de la pupille d'entrée,

$$4\mathcal{G}_{12}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) = 4 \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle e_*(\boldsymbol{\rho}', \sigma) e_*(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho}, \sigma)^* \rangle}{2X} = \int B(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) \exp(-2i\pi\sigma\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}, \quad (5.48)$$

entre deux points séparés de la distance $\boldsymbol{\rho}$. Cette grandeur est directement liée à la distribution de brillance de la source B via le théorème de Zernike Van-Cittert polychromatique, c.f. Eq. (4.37). En combinant Eq. (4.38), Eq. (4.38) et Eq. (4.38) on peut alors introduire le degré de cohérence spatial de la source et le reporter dans l'Eq. (5.47),

$$f_{01}(\sigma) = \|Pe_{01}^*\|^2 I_*(\sigma) \int \mu_{12}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) T_{01}(\mathbf{f} = \sigma\boldsymbol{\rho}, \sigma) d\boldsymbol{\rho}. \quad (5.49)$$

Le terme quadratique extérieur à l'intégrale provenant de la normalisation à l'origine de la fonction de transfert de pupille effective est la norme euclidienne de la fonction pupille usuelle avec le mode gaussien normalisé sur le plan pupille. Ce terme indépendant des conditions de turbulence (quadratique de la fonction pupille) peut être éliminé en calibrant la relation relativement au flux couplé dans le cas idéal par un point-source pour lequel $\mu_{12} = 1$. Dans ces conditions on obtient l'égalité,

$$\overline{f_{01}}(\sigma) = \|Pe_{01}^*(\sigma)\|^2 I_*(\sigma) \overline{S_{01}}. \quad (5.50)$$

La surface effective idéale $\overline{S_{01}}$ provient de l'intégrale spatiale de la fonction de transfert normalisée dans le cas idéal $\overline{T_{01}}$, en vertu de la définition générale livrée par l'Eq. (5.40). D'autre part, le flux guidé par unité de bande passante optique doit être égal au taux de couplage monochromatique d'un point-source idéal multiplié par le flux imagé en entrée par unité de bande passante optique, ce qui implique,

$$\overline{f_{01}}(\sigma) = \overline{\eta_{01}}(\sigma) f_{\text{in}}(\sigma) = \overline{\eta_{01}}(\sigma) SI_*(\sigma) = \overline{\Sigma_{01}}(\sigma) I_*(\sigma) \quad (5.51)$$

⁵Toutes les pertes photoniques étant prises en compte dans la transmission dans le terme de couplage

où l'on a utilisé l'expression du flux d'entrée (Eq. (5.45)) et particularisé la relation au cas idéal en s'appuyant sur la définition de la *section efficace* (Eq. (5.41)). Le terme quadratique apparaît comme le rapport de la section efficace à la surface effective de la pseudo-pupille dans le cas idéal,

$$\|Pe_{01}^*(\sigma)\|^2 = \frac{\overline{\Sigma_{01}}(\sigma)}{\overline{S_{01}}(\sigma)}. \quad (5.52)$$

En définitive, on exprimera le flux guidé par unité de bande passante optique, en utilisant la section efficace idéale $\overline{\Sigma_{01}}(\sigma)$. On introduira également l'angle solide de faisceau idéal $\overline{\Omega_{01}}(\sigma)$ en appliquant la relation donnée par l'Eq. (5.39) dans le cas idéal. Puis on procédera au changement de variables menant des coordonnées pupillaires aux fréquences spatiales, $\mathbf{f} = \sigma \boldsymbol{\rho}$. Le degré spatial de cohérence de l'objet exprimé en fréquences spatiales sera noté $\mu_*(\mathbf{f} = \sigma \boldsymbol{\rho}, \sigma) = \mu_{12}(\boldsymbol{\rho}, \sigma)$. Alors, le flux total guidé par unité de bande passante optique s'exprime sous la forme,

$$f_{01}(\sigma) = I_*(\sigma) \overline{\Sigma_{01}}(\sigma) \overline{\Omega_{01}}(\sigma) \int \mu_*(\mathbf{f}, \sigma) T_{01}(\mathbf{f}, \sigma) d\mathbf{f}, \quad (5.53)$$

et le taux de couplage monomode monochromatique sous la forme,

$$\eta_{01}(\sigma) = \frac{f_{01}(\sigma)}{f_{\text{in}}(\sigma)} = \overline{\eta_{01}}(\sigma) \overline{\Omega_{01}}(\sigma) \int \mu_*(\mathbf{f}, \sigma) T_{01}(\mathbf{f}, \sigma) d\mathbf{f}. \quad (5.54)$$

Elles sont définies sur le plan de Fourier de la source et seront facilement traduites sur le plan image en fonction du lobe d'antenne normalisé en flux,

$$f_{01}(\sigma) = I_*(\sigma) \overline{\Sigma_{01}}(\sigma) \overline{\Omega_{01}}(\sigma) \int B_*(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) L_{01}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\boldsymbol{\alpha} \quad (5.55)$$

et

$$\eta_{01}(\sigma) = \overline{\eta_{01}}(\sigma) \overline{\Omega_{01}}(\sigma) \int B_*(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) L_{01}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\boldsymbol{\alpha} \quad (5.56)$$

où B_* est la distribution de brillance de la source normalisée en flux, i.e.,

$$B_*(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) = \frac{B(\boldsymbol{\alpha}, \sigma)}{\int B(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\boldsymbol{\alpha}} \quad (5.57)$$

Ces deux relations sont capitales puisqu'elles permettent de généraliser la notion de taux de couplage monochromatique *pour une source d'extension angulaire quelconque* et dans n'importe quel contexte observationnel turbulent ou non, ainsi que les effets de la dimension angulaire de la source par rapport au lobe d'antenne. Il est assez naturel de voir apparaître la section efficace de l'antenne à l'extérieur des intégrales. Le produit $I_*(\sigma) \overline{\Sigma_{01}}(\sigma)$ est simplement le nombre de photons par unité de bande passante optique imagés sur le détecteur lorsque l'on observe une source non résolue dans le cas idéal.

5.1.7 Influence de la source

Le taux de couplage est proportionnel aux flux de la source intégré dans le lobe d'antenne. Pour un lobe d'antenne de dimension angulaire donnée, l'augmentation de la taille de la source fait chuter le taux de couplage, car l'intégration du flux stellaire dans le lobe devient partielle. Pour une source compacte (point source) l'intégralité du flux rentre dans le lobe d'antenne. Le cas du point-source est toujours le cas le plus favorable en terme de flux monomode couplé.

5.1.8 Influence de la turbulence atmosphérique

Le lobe d'antenne de la fibre est sensible aux aberrations atmosphériques. Selon un résultat classique, la fonction de transfert optique long temps de pose du lobe d'antenne est obtenue par multiplication du lobe d'antenne idéal par la fonction de transfert atmosphérique. Le champ de vue du lobe d'antenne sur le ciel va être augmenté, une perte de surface effective non plus limitée à la surface du télescope mais à l'aire de cohérence spatiale des fluctuations de phase,

$$\langle T_{01}(\mathbf{f} = \sigma \boldsymbol{\rho}, \sigma) \rangle = \overline{T_{01}}(\mathbf{f} = \sigma \boldsymbol{\rho}, \sigma) \exp -\frac{1}{2} D_\phi(\boldsymbol{\rho}, \sigma) \quad (5.58)$$

D_ϕ étant la fonction de structure des aberrations atmosphériques. Examinons qualitativement l'effet de l'augmentation de champ de vue du lobe due à des aberrations sur le taux de couplage de dans le cas d'une source non résolue (point source) et *centrée* sur le maximum du lobe. On prendra naturellement $B_\star(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) = \delta(\boldsymbol{\alpha})$. On a alors, en utilisant la relation Eq. (5.38) pour introduire le champ de vue du lobe courant $\Omega_{01}(\sigma)$,

$$\frac{\langle \eta_{01}(\sigma) \rangle}{\overline{\eta_{01}}(\sigma)} = \frac{\langle L_{01}(\mathbf{0}, \sigma) \rangle}{\overline{L_{01}}(\mathbf{0}, \sigma)} = \frac{\overline{\Omega_{01}}(\sigma)}{\langle \Omega_{01}(\sigma) \rangle} = \frac{\langle S_{01}(\sigma) \rangle}{\overline{S_{01}}(\sigma)} = \frac{1}{\overline{S_{01}}(\sigma)} \int \overline{T_{01}}(\mathbf{f} = \sigma \boldsymbol{\rho}, \sigma) \exp -\frac{1}{2} D_\phi(\boldsymbol{\rho}, \sigma) d\boldsymbol{\rho} \quad (5.59)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne désormais une moyenne temporelle sur une échelle de temps plus grande que le temps de cohérence atmosphérique. A une longueur d'onde donnée la présence d'aberrations sur la pupille d'entrée augmenter du champ de vue du lobe d'antenne sur le ciel $\frac{\overline{\Omega_{01}}(\sigma)}{\langle \Omega_{01}(\sigma) \rangle} < 1$, augmenter la surface effective par conservation de l'étendue de faisceau monomode et par suite dégrader le taux couplage. La perte de flux guidée est exprimée sous une forme normalisée qui n'est autre que le *rapport de Strehl* moyen du lobe d'antenne (La valeur centrale du lobe normalisée à son maximum théorique dans le cas idéal). A forte turbulence, sans correction adaptative, le taux de couplage long-temps de pose d'une source ponctuelle normalisé à son maximum théorique, sera égale à la résolution angulaire du lobe d'antenne limitée par l'atmosphère i.e divisée par le nombre de speckles moyens dans l'image injectée en entrée du guide,

$$\frac{\langle \eta_{01}(\sigma) \rangle}{\overline{\eta_{01}}(\sigma)} = \frac{S}{\overline{S_{01}}(\sigma)} \left(\frac{r_o(\sigma)}{D} \right)^2 \quad (5.60)$$

Le rapport entre la surface effective et la surface équivalente résulte de la pondération gaussienne de l'ouverture. La dépendance chromatique du strehl est double et gouvernée par la dépendance chromatique du mode fondamental et du paramètre de Fried r_o . La présence d'une correction partielle par optique adaptative va permettre de stabiliser les fluctuations statistiques du champ de vue sur le ciel vis à vis de la turbulence atmosphérique. Nous adapterons les résultats de Conan [18] à la géométrie particulière de la pupille effective. Après correction par optique adaptative partielle, le strehl-long temps de pose s'écrit sous la forme,

$$\frac{\overline{\Omega_{01}}(\sigma)}{\langle \Omega_{01}(\sigma) \rangle} = \frac{\langle S_{01}(\sigma) \rangle}{\overline{S_{01}}(\sigma)} = \frac{1}{\overline{S_{01}}} \int \overline{T_{01}}(\mathbf{f} = \sigma \boldsymbol{\rho}, \sigma) \exp -\frac{1}{2} D_{01}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) d\boldsymbol{\rho} \quad (5.61)$$

D_{01} est une moyenne circulaire sur la pupille effective de la fonction de structure non stationnaire de la phase résiduelle après correction (car non corrigée avec la même efficacité sur la pupille effective),

$$D_{01}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) = \frac{\int \overline{P_{01}}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) \overline{P_{01}}(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho}, \sigma) D_\phi(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}, \sigma) d\boldsymbol{\rho}'}{\int \overline{P_{01}}(\boldsymbol{\rho}', \sigma) \overline{P_{01}}(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}', \sigma) D_\phi(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}, \sigma) d\boldsymbol{\rho}'} \quad (5.62)$$

L'expression approchée de la fonction de structure résiduelle est obtenue en assimilant la moyenne spatiale circulaire de l'exponentielle de la fonction de structure non stationnaire par l'exponentielle de

sa moyenne spatiale. Nous nous placerons dans le contexte d'une correction adaptative suffisamment élevée en ordre de correction de telle sorte que l'on puisse linéariser l'exponentielle de la fonction de structure,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\Omega_{01}(\sigma)}}{\langle \Omega_{01}(\sigma) \rangle} &= 1 - \frac{1}{2\overline{S_{01}}} \int \overline{T_{01}}(\mathbf{f} = \sigma\boldsymbol{\rho}, \sigma) D_{01}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) d\boldsymbol{\rho} \\ &\simeq 1 - \frac{1}{2\overline{S_{01}^2}} \int \overline{P_{01}}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) \overline{P_{01}}(\boldsymbol{\rho}', \sigma) D_{01}(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}, \sigma) d\boldsymbol{\rho} d\boldsymbol{\rho}' \\ &\simeq 1 - \frac{1}{2} \sigma_{01}^2(\sigma) \simeq \exp(-\sigma_{01}^2(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.63)$$

où σ_{01}^2 est la variance spatiale moyenne de la phase résiduelle *sur la pupille effective* après correction adaptative (mode piston inclus),

$$\sigma_{01}^2(\sigma) = \frac{1}{\overline{S_{01}(\sigma)}} \int \overline{P_{01}}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) \langle \phi^2(\boldsymbol{\rho}, \sigma) \rangle d\boldsymbol{\rho} \quad (5.64)$$

Le taux de couplage moyen est un rapport de Strehl long-temps de pose après correction adaptative. Dans notre approximation correspondant à une approximation de Maréchal généralisée à la pupille effective, nous assimilons ce Strehl à l'énergie cohérente du lobe d'antenne. Conan [18] montre que cette approximation n'est pas valide dans le cas d'une correction très partielle de la phase atmosphérique, mais se révèle d'autant meilleure que l'ordre de correction augmente, d'un part parce que la variance de phase résiduelle diminue l'approximation de Maréchal est mieux vérifiée, d'autre part parce que pour une énergie cohérente donnée la fonction de structure corrigée atteint son niveau de saturation plus rapidement avec la correction, le halo incohérent du lobe est plus large et le rapport de Strehl diminue.

Le calcul de la variance résiduelle aux ordres de corrections élevés est donc important puisqu'il permet de quantifier la perte de taux de couplage monomode d'une source non résolue. Ce calcul a été mené par Noll [72] à tout ordre de correction dans le cas d'une représentation modale de la phase atmosphérique sur la base orthogonale des polynômes de Zernike. Nous ne reviendrons pas sur la présentation de cette base modale, puisqu'elle a déjà été présentée au chapitre 3. En revanche nous allons rappeler les propriétés de cette décomposition modale dans un spectre dynamique de turbulence atmosphérique de type Kolmogorov. Le développement en série de la phase atmosphérique sur le support d'une fonction pupille individuelle s'écrit donc c.f Eq. (3.40),

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \sum_1^\infty a_i Z_i(\mathbf{x}) \\ a_i &= \phi|Z_i \end{aligned} \quad (5.65)$$

où a_i est l'amplitude de chaque polynôme de Zernike obtenue par simple projection orthogonale des fluctuations de phase atmosphérique ϕ sur chaque polynôme. Pour une phase atmosphérique ϕ suivant une statistique gaussienne et de moyenne nulle, les coefficients d'amplitude suivent aussi une statistique gaussienne centrée, i.e., $\langle a_i \rangle = 0$. La variance spatiale *instantanée* des fluctuations de phase atmosphérique sur le support de pupille circulaire est définie par, c.f. Eq. (3.41) :

$$\sigma^2 = \sum_{i \in [2, \infty]} a_i^2, \quad (5.66)$$

Cette variance est une variable aléatoire indépendante de l'amplitude du mode piston. Il découle de la relation précédente que la variance spatiale "moyenne" –cette fois-ci au sens de la moyenne prise

sur l'ensemble du processus aléatoire turbulent—est donnée par,

$$\sigma_{(1)}^2 \equiv \langle \sigma^2 \rangle = \sum_{i \in [2, \infty]} b_i^i. \quad (5.67)$$

$b_i^i = \langle a_i a_i \rangle$ est la variance statistique de l'amplitude modale associée au polynôme de Zernike Z_i . La covariance $b_j^i = \langle a_i a_j \rangle$, des amplitudes a_i et a_j associées à deux polynômes de Zernike Z_i et Z_j a été calculée dans une loi de turbulence de Kolmogorov par plusieurs auteurs, Noll [72],

$$b_j^i = \langle a_i a_j \rangle = \gamma_j^i \left(\frac{D}{r_o} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (5.68)$$

γ_j^i est une certaine fonction des ordres radiaux et azimutaux des polynômes d'ordre j et i . Dans une loi de turbulence de Kolmogorov, le terme b_{11} représentant la variance statistique du mode piston diverge à l'infini. Tel ne serait pas le cas pour loi de turbulence de type Von-Karman, du fait de la saturation de la densité spectrale de puissance aux basses fréquences spatiales induite par l'échelle externe et en particulier à la fréquence spatiale nulle. Néanmoins, le calcul analytique de la covariance des polynômes de Zernike dans une loi de turbulence de type Von-Karman, prenant en compte l'effet de l'échelle externe de la turbulence n'existe malheureusement pas. Le terme $b_j^i = \langle a_i a_j \rangle$ n'est autre que l'élément de matrice représentatrice B de la fonction de covariance spatiale des fluctuations de phase, exprimée sur la base des polynômes de Zernike, entre tout couple de points de la pupille séparés du vecteur ρ ,

$$B_\phi(\rho) = \sum_{i \in [1, \infty], j \in [1, \infty[} b_j^i Z_i(\mathbf{x}) Z_j(\mathbf{x} + \rho). \quad (5.69)$$

La variance *statistique* des fluctuations de phase en tout point de la pupille est,

$$B_\phi(0) = \sum_{i \in [1, \infty[} b_i^i = \sigma_{(1)}^2 + b_1^1. \quad (5.70)$$

La variance spatiale moyenne apparaît comme la variance statistique des fluctuations de phases sur la pupille corrigées du mode piston—dont la variance (b_1^1) est infinie dans le cas d'une loi de turbulence de Kolmogorov. Dans un contexte de correction modale des fluctuations de phase par optique adaptative, la variance spatiale moyenne de la phase σ_1^2 sera vue comme l'erreur de front d'onde résiduelle associée premier ordre de la correction. Elle peut être exprimée indépendamment de la loi de turbulence utilisée comme une intégrale limitée au support de la pupille, de la fonction de structure des fluctuations de phase (Conan [18]),

$$\sigma_{(1)}^2 = \frac{1}{2S^2} \int D_\phi(\rho) P(\rho) d\rho, \quad (5.71)$$

Avec la fonction de structure calculée dans le cas d'une turbulence de type Kolmogorov (c.f chapitre 1),

$$\sigma_{(1)}^2 = 1.03 \frac{D^{\frac{5}{3}}}{r_o}. \quad (5.72)$$

Ce résultat se généralise au cas d'une correction parfaite de N modes par optique adaptative, toujours dans une turbulence de type Kolmogorov, la variance spatiale moyenne du résidu de phase atmosphérique s'écrit (Noll [72]),

$$\sigma_{(N)}^2 = A_{(N)} \frac{D^{\frac{5}{3}}}{r_o}. \quad (5.73)$$

Tab. 5.1 – Coefficients d’erreur résiduelle après compensation de N modes de Zernike dans une loi de turbulence de Kolmogorov

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_N	1.03	0.582	0.111	0.088	0.065	0.059	0.053	0.046	0.040	

$A_N \simeq 0.2944N^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \forall N > 10$

Le coefficient d’erreur résiduelle $A_{(N)}$ après compensation de N modes de Zernike étant par ailleurs égal à,

$$A_{(N)} = \sum_{i \in [N+1, \infty[} \gamma_i^i \quad (5.74)$$

Il est notable de constater que la matrice de covariance B n’est pas diagonale. Les modes de Zernike ne sont pas statistiquement indépendants dans un spectre de turbulence de Kolmogorov, et la représentation modale de la phase sur cette base n’est pas la plus “économique” au sens statistique du terme : une partie de l’énergie turbulente se distribue sur des termes de corrélation entre polynômes Zernikes. Le poids statistique des polynômes de Zernike n’est pas maximal. Si bien que pour un ordre de correction donné la variance résiduelle n’est pas la plus faible possible. En ce sens la base de correction la plus efficace est celle des polynômes statistiquement indépendants de Karuhnen-Loeve. Ces polynômes ne sont pas analytiques mais le changement de base permettant de passer celle des polynômes de Zernike à celle des polynômes de Karuhnen-Loeve peut être réalisé numériquement, par diagonalisation de la matrice de covariance B , dont on connaît par ailleurs la représentation sur la base initiale. Ce procédé est au coeur même de certains générateurs numériques la phase turbulente atmosphérique (Roddier [91]).

S’il existe une base modale de correction optimale pour le maintien de l’énergie cohérente dans la tâche d’Airy d’une fonction pupille usuelle, il doit en exister une qui soit optimale pour le maintien de l’énergie cohérente dans le lobe d’antenne (et donc du taux de couplage) du système fibré. Cette base de correction doit être adaptée à la spécificité de la pupille effective de l’antenne monomode qui se trouve être pondérée par le mode fondamental de la fibre. Pour trouver une telle base, on commencera par trouver une base orthogonale définie par $Z_{01i} \quad i \in [1, \infty[$ orthogonale au sens du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \phi_1 |_{01} \phi_2 &= \frac{1}{S_{01}} \int \overline{P_{01}}(\boldsymbol{\rho}) \phi_1(\boldsymbol{\rho}) \phi_2(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \\ Z_{01i} |_{01} Z_{01j} &= \delta_j^i. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Ce sont les polynômes de Zernike définis au sens de la pupille effective, nous les appellerons Zernike effectifs. Notons que dans l’expression convenable du produit scalaire, le numérateur doit être divisé par l’intégrale linéaire de la fonction pupille effective idéale. Même si la définition du produit scalaire est indépendante de toute normalisation choisie pour cette fonction, la normalisation que nous avons retenu permet d’identifier directement cette intégrale à la surface effective du lobe d’antenne idéal. La base orthogonale, au sens de cette nouvelle métrique, est obtenue facilement par division des

polynômes usuels par la racine carré de la pupille effective,

$$Z_{01i}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{Z_i(\boldsymbol{\rho})}{\sqrt{P_{01}(\boldsymbol{\rho})}} \sqrt{\frac{S_{01}}{S}} \quad (5.76)$$

Ce faisant on conserve la propriété d'orthogonalité avec le changement de métrique,

$$Z_{01i} |_{01} Z_{01j} = Z_i | Z_j = \delta_j^i \quad (5.77)$$

Nous disposons donc maintenant d'une base orthogonale sur la pupille effective. L'amplitude de la phase atmosphérique projetée sur cette nouvelle base polynômiale est,

$$a_{01i} = \phi |_{01} Z_{01i} \quad (5.78)$$

et suivra donc une statistique gaussienne centrée. La matrice de passage Q_{01} désignée par l'élément de matrice q_{01j}^i , permettant de mener de la base des polynômes de Zernike usuels à la base des polynômes de Zernike effectifs est définie de telle sorte que,

$$A = Q A_{01} \quad a_i = q_{01j}^i a_{01j} \quad (5.79)$$

où nous avons adopté et utiliserons désormais la notation tensorielle d'Einstein (sommation sur l'indice répété) dans l'équation précédente. Chaque élément de matrice est calculable par projection orthogonale de la base effective sur la base initiale au sens de la métrique initiale,

$$q_{01j}^i = Z_i | Z_{01j} = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{S_{01}}{S}} \int \frac{1}{\sqrt{P_{01}(\boldsymbol{\rho})}} Z_i(\boldsymbol{\rho}) Z_j(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \quad (5.80)$$

tandis que l'élément de la matrice de passage inverse, noté symboliquement q_{01j}^{-1i} est obtenu par projection orthogonale de la base pondérée sur la base initiale au sens de la nouvelle métrique,

$$q_{01j}^{-1i} = Z_i | Z_{01j} = \frac{1}{\sqrt{S S_{01}}} \int \sqrt{P_{01}(\boldsymbol{\rho})} Z_i(\boldsymbol{\rho}) Z_j(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \quad (5.81)$$

La matrice de passage Q_{01} est symétrique, (égale à sa transposée $Q_{01} = Q_{01}^T$). Elle n'est pas orthogonale $Q_{01}^{-1} \neq Q_{01}^T$ (Pour une métrique donnée elle transforme la base initiale en une base non orthogonale, mais orthogonale pour la nouvelle métrique). Elle est non nulle pour les termes tels que la différence d'indice $|i - j|$ est paire. La matrice de passage ne dépend que de la géométrie de la pupille pondérée, fixée par l'optimisation de l'injection d'une source ponctuelle sur le mode fondamental du guide. De ce point de vue, chaque terme est par essence une fonction du rapport entre les surfaces équivalentes $\frac{S_{01}}{S}$.

Une fois la matrice de passage caractérisée, celle-ci permet d'obtenir une représentation matricielle de la covariance B_{01} de la phase atmosphérique sur la nouvelle base des polynômes de Zernike de la pupille effective,

$$B_\phi(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i \in [1, \infty], j \in [1, \infty]} b_{01j}^i Z_{01i}(\mathbf{x}) Z_{01j}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}). \quad (5.82)$$

L'élément de matrice $b_{01j}^i = \langle a_{01i} a_{01j} \rangle$ n'est autre que l'élément de la matrice représentatrice de la fonction de covariance de la phase atmosphérique B_{01} , exprimée sur la base des polynômes de Zernike

au filtrage modal. Le lien unissant la nouvelle représentation de la covariance et la représentation standard s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} B_{01} &= Q_{01} B Q_{01}^T \\ b_{01j}^i &= \langle a_{01i} a_{01j} \rangle = q_{01l}^i b_m^l q_{01j}^m \end{aligned} \quad (5.83)$$

On pourra noter formellement,

$$b_{01j}^i = \gamma_{01j}^i \frac{D^{\frac{5}{3}}}{r_o} . \quad (5.84)$$

Tous les résultats ayant trait à l'utilisation de la base orthogonale des Zernikes sur la pupille usuelle seront transposables à la métrique de la pupille effective et à ses nouveaux représentants orthogonaux. La variance spatiale *instantanée* des fluctuations de phase atmosphérique sur le support de pupille effective sera donc égale à,

$$\sigma_{01}^2 = \sum_{i \in [2, \infty]} a_{01i}^2 \quad (5.85)$$

La variance spatiale “moyenne” –cette fois-ci au sens de la moyenne prise sur l'ensemble du processus aléatoire– sera donnée par ,

$$\sigma_{01(1)}^2 = \langle \sigma_{01}^2 \rangle = \sum_{i \in [2, \infty]} b_{01i}^i \quad (5.86)$$

La variance statistique des fluctuations de phase en tout point de la pupille est,

$$B_\phi(0) = \sigma_\phi^2 = \sum_{i \in [1, \infty[} b_{01i}^i = \langle \sigma_{01(1)}^2 \rangle + b_{011}^1 \quad (5.87)$$

La variance spatiale moyenne apparaît encore comme la variance statistique des fluctuations de phases sur la pupille corrigées du mode piston (dont la variance est infinie dans le cas d'une loi de turbulence de Kolmogorov). Elle peut être exprimée indépendamment de la loi de turbulence utilisée comme une intégrale de la fonction de structure des fluctuations de phase, sur le support de la pupille effective cette-fois,

$$\sigma_{01(1)}^2 = \frac{1}{2S_{01}^2} \int D_\phi(\rho) P_{01}(\rho) d\rho \quad (5.88)$$

Avec la fonction de structure calculée dans le cas d'une turbulence de type Kolmogorov,

$$\sigma_{01(1)}^2 = A_{01(1)} \frac{D^{\frac{5}{3}}}{r_o} \quad (5.89)$$

$A_{01(1)}$ sera le pendant du coefficient de Noll 1.03 . Ce résultat se généralise au cas d'une correction parfaite de N modes par optique adaptative, toujours dans une turbulence de type Kolmogorov, la variance spatiale moyenne du résidu de phase atmosphérique s'écrit sous la forme générale,

$$\sigma_{01(N)}^2 = A_{01(N)} \frac{D^{\frac{5}{3}}}{r_o} \quad (5.90)$$

Le coefficient d'erreur résiduelle $A_{(N)}$ après compensation de N modes de Zernike pondérés étant par ailleurs égal à,

$$A_{(N)} = \sum_{i \in [N+1, \infty[} \gamma_{01i}^i \quad (5.91)$$

Par le truchement du changement de base, les coefficients γ_{01i}^i , $A_{01(N)}$ dépendent exclusivement du rapport $\frac{S_{01}}{S}$ qui mesure l'importance de la pondération du mode fondamental sur l'ouverture du

télescope. Ce rapport croît avec la taille relative du mode par rapport au diamètre pupillaire pur atteindre l'unité dans le cas où il n'y a aucune pondération. Lorsque le rapport est voisin de l'unité on pourra considérer en première approche que la pondération est faible que les modes restent faiblement

Lorsque le rapport est $\frac{S_{01}}{S}$ est voisin de l'unité, on peut considérer en première approche que les polynômes de Zernike usuels restent quasi-orthogonaux y-compris au sens de la métrique pondérée ; l'effet du changement de métrique consistant au premier ordre en une renormalisation homothétique constante (au sens spatial du terme) de la base modale. Les modes de Zernike effectifs sont quasi-colinéaires aux modes de Zernike usuels. Dès lors, la matrice de passage est quasi diagonale et orthogonale,

$$Q_{01}\left(\frac{S_{01}}{S}\right) \simeq \sqrt{\frac{S_{01}}{S}} I_d \quad Q_{01}^{-1}\left(\frac{S_{01}}{S}\right) \simeq \sqrt{\frac{S}{S_{01}}} I_d \quad (5.92)$$

Le lien unissant les deux représentations matricielles de la covariance de la phase atmosphérique devient une simple relation de proportionnalité,

$$B_{01} = \frac{S_{01}}{S} B \quad (5.93)$$

Dans ce cas, le coefficient d'erreur résiduelle de la phase atmosphérique sur la pupille pondérée se déduit facilement de celui obtenue sur une pupille classique,

$$\frac{\sigma_{01(N)}^2}{\sigma_{(N)}^2} = \frac{A_{01(N)}}{A_{(N)}} \simeq \frac{S_{01}}{S} \quad (5.94)$$

Pour une injection optimale non obstruée, ce rapport est typiquement de $\frac{S_{01}}{S} = 0.9$. Ruillier [86] dans une approche complètement numérique trouve un “nombre magique voisin de 0.8” Ce nombre n'est pas magique, il s'agit d'un nombre fonction (proche de l'identité dans notre approximation) du rapport relatif de la surface effective à la surface du télescope. Ce nombre croît avec la taille du mode sur la pupille.

La diagonalisation numérique de cette nouvelle représentation de la covariance des aberrations sur la base des polynômes de zernike effectifs permettrait théoriquement d'obtenir la base de correction modale optimale pour le filtrage modal, une base polynômiale dont chaque élément serait statistiquement indépendant d'un autre dans la loi de turbulence considérée, i.e. le pendant exact de la base des polynômes de Karhunen-Love dans un traitement classique au sens de la métrique usuelle des aberrations atmosphériques. Ces polynômes seraient les Karhunen Loeve effectifs, quasi-homothétiques des premiers dans le cadre de la dernière approximation.

En conclusion dans le cadre d'une correction élevée où l'on peut assimiler le Strehl à l'énergie cohérente du lobe d'antenne, la perte de taux couplage normalisé à sa valeur maximal théorique admise pour l'observation en laboratoire d'une source non résolue s'exprime par,

$$\frac{\langle \eta_{01}(\sigma) \rangle}{\eta_{01}} \simeq \exp - \frac{\overline{S_{01}}(\sigma)}{S} A_{(N)} \frac{D}{r_o(\sigma)}^{\frac{5}{3}} \quad (5.95)$$

$A_{(N)}$ sont les coefficients d'erreur résiduelle de front d'onde calculés par Noll lors d'une correction idéale à l'ordre N . Toujours dans le même cadre hypothétique, nous allons nous intéresser aux fluctuations statistiques du taux de couplage d'une source non résolue. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, normalisé à sa valeur maximale théoriquement admissible, le taux de couplage sur le mode fondamental est complètement assimilable à un rapport de Strehl.

5.2 Couplage multi-pupilles

Dans la section précédente nous avons décrit l'intensité lumineuse produite à la sortie d'un couplage électromagnétique d'une mono-pupille avec un guide d'onde monomode. Nous avons montré que le flux monomode guidé est transporté par une onde porteuse monochromatique normalisée en flux de nature instrumentale complètement déterminée par la design optique situé en aval du filtre modal. Cette onde porteuse peut toujours être exprimée dans un système de coordonnées angulaires vue sur le détecteur, vue depuis la pupille de sortie du système. Insistons lourdement sur le fait que ce système de coordonnées n'a pas de signification physique sur le ciel. Il sert à décrire la répartition géométrique du flux imagé sur le détecteur, mais cette distribution purement géométrique est entièrement gouvernée par la diffraction du mode fondamental en aval du filtre modal.

La propagation de la cohérence partielle en amont du filtre modal nous a permis de réinterpréter le flux monomode guidé par unité de bande passante optique directement sur le ciel et nous a permis de montrer que le système fibré se comporte photométriquement exactement comme une antenne radio. Le flux monomode correspond à l'intégration de la brillance de la source dans un lobe d'antenne correspondant à la tâche de diffraction de l'ouverture éclairée en retour inverse par le mode fondamental du guide d'onde. La particularité du lobe d'antenne aux longueurs d'onde optiques infrarouge est d'être sensible à la turbulence atmosphérique, alors qu'aux longueurs d'onde radio le considéré comme statique la surface de l'antenne étant phasée. Nous interprétons la conversion photométrique des aberrations pupillaires en termes de fluctuations du champ de vue du lobe sur le ciel. Le lobe perd en résolution angulaire au cause de la formation d'un halo étendu incohérent. Lorsque le lobe pointe sur une source ponctuelle la fluctuation de flux monomode normalisée à sa valeur non turbulente mesure la perte de sensibilité de l'antenne au centre du champ, soit un rapport de Strehl.

Nous allons maintenant nous intéresser à la corrélation interférométrique de deux signaux monomodes. Nous allons généraliser le résultat précédent au niveau du flux *corrélé* par unité de bande passante optique dans l'expérience interférométrique. Nous décrirons un système constitué de deux pupilles sachant que le résultat sera généralisable pour un nombre quelconque.

5.2.1 Intensité mutuelle

Reconsidérons les représentations analytiques de chacun des signaux, c.f. Eq. (5.15) distingués respectivement par un indice supérieur 1 et 2.

$$\begin{aligned} V_{01}^1(\boldsymbol{\alpha}, x) &= 2 \int_0^\infty c_{01}^1(\sigma) G_{01}^1(\mathbf{r}, \sigma) \exp 2i\pi\sigma x d\sigma \\ V_{01}^2(\boldsymbol{\alpha}, x) &= 2 \int_0^\infty c_{01}^2(\sigma) G_{01}^2(\mathbf{r}, \sigma) \exp 2i\pi\sigma x d\sigma. \end{aligned} \quad (5.96)$$

La densité spectrale mutuelle des signaux recombinaés définie par la relation Eq. (4.13) au point de la recombinaison est donnée par la grandeur,

$$\mathcal{G}_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle c_{01}^1(\sigma) c_{01}^{2*}(\sigma) \rangle}{2X} H^{12}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) \quad (5.97)$$

où $\langle . \rangle$ est une moyenne d'ensemble ou temporelle par ergodicité sur X une échelle de temps plus grande que le temps de cohérence caractéristique de la radiation $l_c = \frac{1}{\delta\sigma}$. Nous avons introduit l'expression de l'onde porteuse du flux corrélé à l'aide de l'équation Eq. (5.20) particularisée à chacune des voies.

$$H^{12}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = \sqrt{H_{01}^1(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) H_{01}^2(\boldsymbol{\alpha}', \sigma)} \exp i\phi_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) \quad (5.98)$$

Cette onde porteuse est une quantité complexe de phase ϕ_{01}^{12} qui correspond à la phase instrumentale statique du système interférométrique fibré provenant de la propagation différentielle des modes géométriques, incluant la propagation dans la fibre et la propagation en espace libre donnée par l'équation Eq. (5.14). Par extension directe de la notion de flux monomode guidé photométriquement (c.f. Eq. (5.18), le flux monomode corrélé par unité de bande passante optique interférométriquement sera défini par la grandeur complexe,

$$f_{01}^{12}(\sigma) = 4 \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\langle c_{01}^1(\sigma) c_{01}^{2*}(\sigma) \rangle}{2X}, \quad (5.99)$$

Et l'on définira la *visibilité complexe monomode* ou *visibilité modale* de l'interféromètre comme la normalisation du flux corrélé à la moyenne géométrique des flux guidés photométriquement dans chacune des voies en interférences,

$$V_{01}^{12}(\sigma) = \frac{f_{01}^{12}(\sigma)}{\sqrt{f_{01}^1(\sigma) f_{01}^2(\sigma)}} \quad (5.100)$$

La phase du flux corrélé dans l'expérience sera notée $\theta_{01}^{12}(\sigma)$, ce sera aussi par voie de conséquence la phase de la visibilité modale. Le portage naturel de la notion d'efficacité de couplage, au cas de la corrélation interférométrique est la normalisation du flux corrélé par unité de bande passante optique à la moyenne géométrique des flux injectés dans les deux guides (c.f Eq. (5.25) et Eq. (5.26)),

$$\eta_{01}^{12}(\sigma) = \frac{f_{01}^{12}(\sigma)}{\sqrt{f_{in}^1(\sigma) f_{in}^2(\sigma)}} = V_{01}^{12}(\sigma) \sqrt{\eta_{01}^1(\sigma) \eta_{01}^2(\sigma)} \quad (5.101)$$

L'intensité mutuelle (complexe) des deux signaux au point de la recombinaison, c.f. Eq. (4.14) et Eq. (4.19) est donc ,

$$J_{01}^{12}(\alpha') = \langle V_{01}^1(\alpha, x) V_{01}^{2*}(\alpha, x) \rangle = \int_0^\infty 4 \mathcal{G}_{01}^{12}(\alpha, \sigma) d\sigma = \int_0^\infty f_{01}^{12}(\sigma) H^{12}(\alpha', \sigma) d\sigma. \quad (5.102)$$

L'onde porteuse interférométrique transporte le flux corrélé au sein de l'expérience interférométrique monomode. L'interférogramme polychromatique résultant de la recombinaison des deux enveloppes,

$$I_{01}(\alpha') = \langle |V_{01}^1(\alpha', x) + V_{01}^2(\alpha', x)|^2 \rangle, \quad (5.103)$$

aura pour expression,

$$\begin{aligned} I_{01}(\alpha') &= I_{01}^1(\alpha') + I_{01}^2(\alpha') + J_{01}^{12}(\alpha) + cc \\ &= \int_0^\infty f_{01}^1(\sigma) H^1(\alpha', \sigma) + f_{01}^2(\sigma) H^2(\alpha', \sigma) + f_{01}^{12}(\sigma) H^{12}(\alpha', \sigma) + c.c. d\sigma \\ &= \int_0^\infty f_{01}^1(\sigma) H^1(\alpha', \sigma) + f_{01}^2(\sigma) H^1(\alpha', \sigma) d\sigma \\ &\quad + \int_0^\infty 2 \sqrt{f_{01}^2(\sigma) f_{01}^1(\sigma)} |V_{01}^{12}(\sigma)| \sqrt{H_{01}^1(\sigma)(\alpha', \sigma) H_{01}^2(\sigma)(\alpha', \sigma)} \cos(\phi_{01}^{12}(\alpha', \sigma) + \theta_{01}^{12}(\sigma)) d\sigma, \end{aligned} \quad (5.104)$$

soit une superposition générale d'interférogrammes monochromatiques pour lesquels le module de la *visibilité modale* apparaît comme la visibilité de chaque interférogramme élémentaire. Le formalisme et la terminologie employée ici ne s'arrête pas au cas d'une recombinaison mutliaxiale. C'est ce que nous allons voir dans la section suivante.

5.3 Recombinaison coaxiale

Nous dérivons ici l'équation interférométrique dans le cas d'une recombinaison coaxiale comme celle rencontrée dans l'expérience FLUOR, pour laquelle les interférogrammes sont codés temporellement et non spatialement. L'onde porteuse interférométrique est donnée par l'équation Eq. (5.14), pour laquelle on posera $\mathbf{b}^{12} = 0$ (pas de codage multiaxial), et l'on notera ici $x = z^1 - z^2$ la différence de chemin optique modulée en espace libre. Dès lors la phase instrumentale s'écrit,

$$\phi_{01}^{12}(x, \boldsymbol{\alpha}') = \underbrace{2\pi\sigma x}_{\text{modulation}} + \underbrace{\beta_{01}^1(\sigma)L^1 - \beta_{01}^2(\sigma)L^2}_{\text{guide}} + \phi_{\text{sys}}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) \quad (5.105)$$

L'interférogramme va être intégré sur un monopixel. Les ondes porteuses normalisées en flux des signaux photométriques vont disparaître après intégration spatiale (c.f. Eq. (5.21)). En revanche l'intégration spatiale de l'onde porteuse interférométrique et de sa phase d'aberration, ϕ_{sys}^{12} va convertir celle-ci en piston tout en réduisant la visibilité de l'interférogramme monochromatique. Néanmoins dans le cas de l'expérience FLUOR, les faisceaux recombinaison au sein d'une jonction Y et transportés sur une seule onde porteuse avant d'être imagés. Dans notre formalisme cela revient à considérer que les modes géométriques sont colinéaires ne différant que par un terme de piston. L'intégration de l'onde porteuse ne renvoie que la phaseur de phase,

$$\phi_{01}^{12}(x, \sigma) = 2\pi\sigma x + \beta_{01}^1(\sigma)L^1 - \beta_{01}^2(\sigma)L^2 \quad (5.106)$$

Dans ces conditions l'interférogramme polychromatique général s'écrit,

$$I_{01}(x) = \int_0^\infty f_{01}^1(\sigma) + f_{01}^2(\sigma) + 2\sqrt{f_{01}^1(\sigma)f_{01}^2(\sigma)}|V_{01}^{12}(\sigma)| \cos(\phi_{01}^{12}(x, \sigma) + \theta^{12}(\sigma)) d\sigma \quad (5.107)$$

Les ondes porteuses sont cette fois-ci codées *temporellement*. Les ondes porteuses basses fréquence sont unitaires tandis que l'onde porteuse de la corrélation se réduit à un phaseur modulé dans le temps.

Que ce soit dans le cas d'AMBER ou de FLUOR en recombinaison coaxiale, le caractère particulier de l'équation interférométrique tient au fait que les ondes porteuses sont des quantités déterminées par le design optique post-filtrage modal. Cette caractéristique essentielle est à l'origine de la procédure de réduction de données interférométriques pour AMBER ou FLUOR fondée sur le principe de calibration photométrique des visibilités. (c.f. Sect.(4.5)) Procédure que nous allons maintenant détailler en ce qui concerne le recombineur AMBER.

5.3.1 Pixel To Visibility Matrix

Les ondes porteuses du signal interférométrique étant déterministes il n'est pas nécessaire ni de les stopper sur le plan de la pupille de sortie de l'interféromètre, ni de séparer le continu de l'interférogramme, du signal frangé dans le pseudo-plan de Fourier de l'interférogramme. Sur ce plan l'onde porteuse photométrique sera notée,

$$\widetilde{H}^{12}(\mathbf{f}', \sigma) = \int H^{12}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) \exp(-2i\pi\sigma\boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{f}') d\boldsymbol{\alpha}' \quad (5.108)$$

Du fait de la modulation spatiale des franges, cette onde est centrée à la fréquence $\mathbf{f}' = \mathbf{b}^{12}$ (Rappelons que nous avons inclus la phase modulation dans la définition de la phase instrumentale de

l'onde porteuse). Dans le cas d'AMBER, on les a stoppées et on n'a pas séparé l'onde porteuse interférométrique, des ondes porteuses photométriques, de manière à réduire l'échantillonnage sur le plan de l'interférogramme pour des considérations de rapport signal à bruit.

On cherchera donc à les déterminer précisément. L'idée est de les calibrer en laboratoire une fois pour toutes avant le run d'observation et de n'avoir à mesurer en temps réel que les flux photométriques et le flux corrélé complexe (partie réelle et imaginaire) dans l'expérience interférométrique. Je vais montrer qu'une étape de la procédure de reconstruction de l'onde porteuse interférométrique telle que proposée dans le mémo AMBER AMB-IGR-18 est superflue. Je raisonnerai sur une composante monochromatique de l'interférogramme, qui sera défini par unité de bande passante optique donné par l'équation Eq. (5.104), i.e $\delta\sigma = 1$. La première étape concerne la calibration des ondes porteuses,

$$I_{01}(\alpha', \sigma) = f_{01}^1(\sigma)H^1(\alpha', \sigma) + f_{01}^2(\sigma)H^1(\alpha', \sigma) + \sqrt{f_{01}^2(\sigma)f_{01}^1(\sigma)}|V_c(\sigma)|\sqrt{H_{01}^1(\sigma)(\alpha', \sigma)H_{01}^2(\alpha', \sigma)}\cos(\phi_{01}^{12}(\alpha', \sigma) + \theta_c(\sigma))d\sigma, \quad (5.109)$$

V_c de phase θ_c est la visibilité modale de la source de calibration. La reconstruction des ondes porteuses photométriques n'est pas un problème. Il suffit d'éclairer une des deux entrées interférométriques en occultant l'autre. Pendant cette phase, on enregistre aussi le signal de dérivation photométrique qui s'exprime par

$$C_{01}^{1'}(\alpha', \sigma) = \kappa_{01}^1(\sigma)f_{01}^1(\sigma)H_{01}^{1'}(\alpha', \sigma) \quad (5.110)$$

$\kappa^1(\sigma)$ la transmission photonique qui conduit de la transformation purement géométrique de l'onde porteuse normalisée en flux au profil de diffraction également normalisé en flux $H_{01}^1(\alpha, \sigma)$ du signal de calibration. On forme le rapport de conversion photométrique pixel à pixel de la voie de calibration dans le signal photométrique de l'interférogramme,

$$v(\alpha', \sigma) = \frac{1}{\kappa_{01}^1(\sigma)} \frac{H_{01}^1(\alpha', \sigma)}{H^1(\alpha', \sigma)} \quad (5.111)$$

Une fois ce rapport connu et enregistré, dès lors pour toute expérience interférométrique,

$$v_{01}^1(\alpha', \sigma) C_{01}^1(\alpha', \sigma) = f_{01}^1(\sigma)H_{01}^1(\alpha, \sigma) \quad (5.112)$$

et l'on pourra reconstruire chaque composante photométrique au continu de l'interférogramme. La procédure sera reconduite réciproquement pour la seconde entrée en occultant la première voie entrée exactement,

$$v_{01}^2(\alpha', \sigma) I_{01}^{2'}(\alpha', \sigma) = f_{01}^2(\sigma)H_{01}^2(\alpha, \sigma) \quad (5.113)$$

Il suffira de multiplier le signal de calibration photométrique par le rapport de conversion pour connaître la contribution photométrique correspondante dans l'interférogramme. Il suffira alors d'intégrer le produit pour connaître le flux monomode guidé $f_{01}^1(\sigma)$ ou $f_{01}^2(\sigma)$. On pourra aussi normaliser le v au flux mesuré pour connaître l'onde porteuse normalisée $H_{01}^2(\alpha, \sigma)$ ou $H_{01}^1(\alpha, \sigma)$.

Il est donc possible de connaître exactement le continu de l'interférogramme tant en géométrie qu'en photométrie. La mesure de l'onde porteuse complexe photométrique nécessite cependant l'utilisation des franges d'interférence. Le signal interférométrique produit par la lampe de calibration est maintenant enregistré puis corrigé de son continu, et corrigé de la moyenne géométrique des flux intégrés et éventuellement corrigé du module de l'onde porteuse interférométrique car toutes ces grandeurs se déduisent des voies calibration préalablement converties- mais cette dernière correction n'ayant pas

d'incidence sur la suite du raisonnement, nous nous ne la ferons pas. On forme ainsi l'interférogramme corrigé :

$$t_{01}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) = 2|V_c(\sigma)|\sqrt{H_{01}^1(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}', \sigma)H_{01}^2(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}', \sigma)}\cos(\phi_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}', \sigma) + \theta_c(\sigma)) \quad (5.114)$$

Le problème est donc de déterminer la phase de l'onde porteuse. L'interférogramme renvoie la partie réelle de l'onde porteuse. L'idée qui a été introduite est de mesurer la partie imaginaire en introduisant en un autre interférogramme corrigé de la même manière mais possédant un certain déphasage. On peut toujours choisir un déphasage quelconque pour reconstruire l'onde porteuse à partir des données expérimentales. L'avantage de mettre une quadrature est d'obtenir un second interférogramme, mesurant directement la partie imaginaire de l'onde porteuse. Mais cette démarche est absolument inutile car si *l'on a la partie réelle, on a aussi la partie imaginaire et donc la quadrature parfaite*. Il suffit de considérer la transformée de Fourier de l'interférogramme. Celui-ci est un signal composé de la somme de l'onde porteuse interférométrique et de son complexe conjugué $|V_c(\sigma)|\widetilde{H_{01}^{12}(\mathbf{f}', \sigma)} + c.c..$ La transformée de Fourier inverse du pic pris isolément est tout bonnement l'onde porteuse complexe sur le plan image dont on peut extraire le module (mais déjà connu avec les voies de calibration photométriques) et la phase. L'onde porteuse complexe est la représentation complexe analytique de l'interférogramme. Sa partie réelle vaut l'interférogramme sa partie imaginaire la quadrature de phase de l'interférogramme. A deux entrées interférométriques tout au moins, il n'est pas nécessaire de procéder à une mesure de la quadrature en enregistrant un autre interférogramme⁶.

Par contre ce qu'il importe de voir c'est que l'onde porteuse est toujours estimée à une constante près qui est la visibilité complexe de la lampe de calibration interne. Son lien exact avec le pic frange de l'interférogramme expérimental,

$$\widetilde{H_{01}^{12}(\mathbf{f}', \sigma)} = \frac{\widetilde{t_{01}^+}(\mathbf{f}', \sigma)}{|V_c(\sigma)|\exp -i\theta_c(\sigma)} \quad (5.115)$$

où $\widetilde{t_{01}^+}$ est le pic haute-fréquence de l'interférogramme corrigé de la photométrie, servant à la calibration. La visibilité de la source étant une inconnue du problème, en prenant pour l'estimée de l'onde porteuse le pic frange de l'interférogramme lui-même, on sur-estime l'onde porteuse réelle : il s'ensuit que le flux corrélé mesurée sur un interférogramme "scientifique" calibré en utilisant cette onde porteuse sera sous estimée d'un facteur $V_c(\sigma)$.

La réduction des données sur le ciel est réalisée sur le plan image. On recherche par une minimisation de type moindres carrés quel est le flux corrélé en module et phase (on utilise en fait les parties réelles et imaginaires) qui multiplié à l'onde porteuse calibrée précédemment (dont on connaît les parties réelles et imaginaires sans avoir eu recours à une mesure supplémentaire de quadrature à 2 télescopes) ajuste au mieux la forme la forme de l'interférogramme scientifique corrigé de son continu photométrique. Si la phase de l'onde porteuse estimée n'est pas celle de l'onde porteuse réelle, la phase du flux corrélé va s'ajuster naturellement pour fitter l'interférogramme scientifique, idem en module. Ainsi idéalement la mesure d'une source non résolue devrait rendre $|V_{01}^{12}(\sigma)| = \frac{1}{V_c(\sigma)}$, et $\theta_{01}^{12}(\sigma) = -\theta_c(\sigma)$. L'observation d'un calibrateur de visibilité non résolu par l'interféromètre permettra de recalibrer correctement les données (en phase et en amplitude).

Ainsi une fois les ondes porteuses calibrées, les estimateurs de visibilité quadratiques ou long temps de pose formés à partir de la mesure du flux corrélé (complexe) et de la mesure des flux dans les signaux

⁶Le raisonnement n'est pas extrapolable à 3 voies dans le cas où les ondes porteuses sont mélangées sur leur pseudo-plan de Fourier. Or c'est précisément l'option retenue dans AMBER, pour des raisons relatives à l'échantillonnage spatial des franges. L'introduction d'une lame de phase sur une seconde mesure interférométrique est dans ce cas absolument nécessaire pour reconstruire l'onde porteuse.

de calibration photométriques sont,

$$\begin{aligned} \text{quadratique : } & \langle V_{01}^2 \rangle = \frac{\langle |f_{01}^{12}(\sigma)|^2 \rangle}{\langle f_{01}^1 f_{01}^2 \rangle} \\ \text{linéaire : } & \langle V_{01} \rangle = \frac{\langle f_{01}^{12}(\sigma) \rangle}{\sqrt{\langle f_{01}^1 f_{01}^2 \rangle}} \end{aligned} \quad (5.116)$$

Maintenant que nous avons une procédure de réduction de données, il est grand temps de voir ce que l'on est en droit d'attendre d'une mesure du flux corrélé par rapport au degré de cohérence de la source stellaire. Pour ce faire, nous allons transposer l'expression du flux corrélé sur le plan de la pupille d'entrée interférométrique.

5.4 Cohérence partielle

5.4.1 Lobe d'antenne interférométrique

Avant toute chose caractérisons ce que nous appellerons le lobe d'antenne interférométrique. Chaque guide est pourvue de son propre lobe d'antenne défini selon l'équation Eq. (5.35). Cette définition du lobe d'antenne se généralise au cas de deux pupilles pourvues de pupilles effectives P_{01}^1 et P_{01}^2 dont la fonction de transfert sur le plan de Fourier s'exprime sous la forme,

$$T_{01}^{12}(\mathbf{f}, \sigma) = \frac{(P_{01}^1 \star P_{01}^2)(\boldsymbol{\rho} = \sigma^{-1}\mathbf{f})}{\sqrt{\|P_{01}^1(\sigma)\|^2 \|P_{01}^2(\sigma)\|^2}}, \quad (5.117)$$

Il est construit mathématiquement par le *produit* de corrélation spatiale des pupilles effectives. Le lobe d'antenne est normalisé à la moyenne géométrique des surface effectives de chaque antenne. Il se construit exactement comme le pic haute fréquence d'un interférogramme obtenu lors d'une recombinaison multiaxiale multimode plan image. Contrairement au lobe photométrique, il n'est pas hermitique $T_{01}^{12}(\mathbf{f}, \sigma) \neq T_{01}^{12*}(-\mathbf{f}, \sigma)$. (Mais l'image produite par synthèse interférométrique d'ouverture étant réelle elle fera intervenir son complexe conjugué). Il ne l'est que si les deux pupilles effectives sont parfaitement cophasées, i.e à valeurs réelles. Il s'agit là d'une propriété absolument fondamentale qui le distingue du lobe d'antenne photométrique. La normalisation choisie fait qu'il n'est unitaire (en module) à l'origine des fréquences spatiales que sous la condition où les fonctions pupilles sont colinéaires et donc différent par une constante complexe de module unitaire, i.e un piston différentiel (inégalité de Cauchy-Schwartz). Sur le plan des fréquences spatiales le lobe a une coupure bien définie. Sa largeur est égale à $\sigma \frac{D^1 + D^2}{2}$ avec D^1 et D^2 désignant les diamètres pupillaires de chaque antenne. Sur le plan image, sa transformée de Fourier sera notée,

$$L_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) = \int T_{01}^{12}(\mathbf{f}, \sigma) \exp 2i\pi\sigma\mathbf{f}\boldsymbol{\alpha} \, d\mathbf{f}. \quad (5.118)$$

En toute généralité ce lobe en *est complexe*. Il est aux aberrations différentielles sur les pupilles effectives et notamment au piston différentiel. Les problèmes d'imagerie interférométrique feront intervenir la *partie réelle* du lobe d'antenne interférométrique. Compte tenu de la définition du lobe d'antenne photométrique pour chacun des deux guides, le module lobe d'antenne interférométrique est relié aux lobes d'antennes photométriques par l'intermédiaire de la relation,

$$|L_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma)| = \sqrt{L_{01}^1(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) L_{01}^2(\boldsymbol{\alpha}, \sigma)} \quad (5.119)$$

conséquence directe de la distributivité du produit de corrélation spatiale, i.e $(P_{01}^1 \star P_{01}^2) \star (P_{01}^1 \star P_{01}^2) = (P_{01}^1 \star P_{01}^1) \star (P_{01}^2 \star P_{01}^2)$. Le lobe d'antenne interférométrique est égal à la moyenne géométrique des lobes d'antenne photométriques réels et positifs, si les pupilles sont cophasées. Si les pupilles sont soumises à un piston différentiel le piston différentiel est factorisable de l'expression du lobe idéal. Si les pupilles ne sont soumises qu'à un tip-tilt d'amplitude α_1 et α_2 , les lobes d'antennes photométriques se déplacent dans le plan image,

$$L_{01}^1(\boldsymbol{\alpha}) = \overline{L_{01}^1}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^1, \sigma) L_{01}^2(\boldsymbol{\alpha}) = \overline{L_{01}^2}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^2, \sigma) \quad (5.120)$$

En revanche le lobe d'antenne interférométrique sera quant à lui sensible au recouvrement des lobes photométriques. En particulier si le tip-tilt différentiel $\alpha^{12} = \alpha^1 - \alpha^2$, excède le champ de vue des lobes photométriques ce dernier sera nul. Toute aberration différentielle autre que le tip-tilt engendrera un lobe complexe possédant une phase sur le ciel dues aux aberrations, que l'on notera ϕ_L^{12} ,

$$L_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) = \sqrt{L_{01}^1(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) L_{01}^2(\boldsymbol{\alpha}, \sigma)} \exp(i\phi_L^{12}(\boldsymbol{\alpha})) \quad (5.121)$$

Le lobe d'antenne interférométrique long-temps de pose peut-être connu exactement. Sachant que le lobe d'antenne se forme par le produit de corrélation spatiale des pupilles, il souffrira du même comportement statistique que le pic haute fréquence d'un interférogramme en recombinaison mutliaxiale multimode. On pourra donc se référer à [18] pour déduire le comportement du lobe après correction adaptative partielle

$$\langle T_{01}^{12}(\mathbf{f}, \sigma) \rangle = \exp \sigma_{01(N)}^2 \exp -\sigma_{01\text{piston}}^2 \overline{T_{01}^{12}}(\mathbf{f}, \sigma) \quad (5.122)$$

En interférométrie longue base, le lobe d'antenne long temps de pose est le lobe *non perturbé* atténué de la variance du mode piston différentiel et de la variance résiduelle de la phase atmosphérique après correction. Notons que la variance du mode piston différentiel doit être redéfinie au sens de la pupille effective pondérée par le filtre modal. Le piston différentiel en sortie de guide résultant du mode piston usuel transmis en bloc par chaque guide augmenté du mode piston créé par la conversion d'amplitude des aberrations d'ordre supérieures au tip-tilt. Il est notable de constater que l'amplitude du lobe est atténuée mais qu'il retrouve le même champ de vue sur le ciel qu'en conditions non turbulentes. Ceci-s'explique par un effet de décorrélation spatiale des aberrations de phase d'une pupille à l'autre. Alors qu'il se passe exactement le contraire pour les lobes d'antennes photométriques qui voient leur champ de vue s'élargir au détriment du taux de couplage. Le contrôle de la variance du piston différentiel pour l'estimateur long temps de pose est plus que jamais nécessaire.

Le lobe d'antenne interférométrique étant défini, nous pouvons entreprendre sagement la propagation de la corrélation interférométrique au sein du système fibré.

5.4.2 Propagation de la cohérence partielle

Le flux monomode *corrélé* par unité de bande passante optique peut être exprimé sur le plan de la pupille d'entrée de l'interféromètre. Sur ce plan, la composante du signal monochromatique de chaque canal interférométrique est factorisable sous la forme,

$$\begin{aligned} \widetilde{e}_{\text{in}}^1(\boldsymbol{\rho}, \sigma) &= P^1(\boldsymbol{\rho}, \sigma) e_{\star}(\boldsymbol{\rho} + \frac{B^{12}}{2}, \sigma) \\ \widetilde{e}_{\text{in}}^2(\boldsymbol{\rho}, \sigma) &= P^2(\boldsymbol{\rho}, \sigma) e_{\star}(\boldsymbol{\rho} - \frac{B^{12}}{2}, \sigma), \end{aligned} \quad (5.123)$$

où B^{12} est la ligne de base interférométrique. En utilisant la définition du flux corrélé livré par l'Eq. (5.99), ainsi que l'expression plan-pupille de l'amplitude complexe monochromatique couplée pour chacune des voies Eq. (5.99), Eq. (5.3),

$$f_{01}^{12}(\sigma) = \|Pe_{01}^1\|^* \|Pe_{01}^2\|^* \int 4\mathcal{G}_{12}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) T_{01}^{12}(\mathbf{f} = \sigma\boldsymbol{\rho} - \sigma\mathbf{B}^{12}, \sigma) d\boldsymbol{\rho}, \quad (5.124)$$

où T_{01}^{12} est la fonction de transfert du lobe d'antenne interférométrique résultant du produit de corrélation spatiale des pupilles effectives éclairée en retour inverse par le mode fondamental du guide sur chaque voie (c.f Eq. (5.117) et où \mathcal{G}_{12} est la densité spectrale *mutuelle* de la source sur le plan de la pupille d'entrée définie par l'Eq. (5.48). On introduira le degré de cohérence spatial du signal stellaire,

$$f_{01}^{12}(\sigma) = \|Pe_{01}^1\|^* \|Pe_{01}^2\|^* I_*(\sigma) \int \mu_{12}(\boldsymbol{\rho}, \sigma) T_{01}^{12}(\mathbf{f} = \sigma\boldsymbol{\rho} - \sigma\mathbf{B}^{12}, \sigma) d\boldsymbol{\rho}, \quad (5.125)$$

et on utilisera l'Eq. (5.52) particularisée 'à chaque antenne pour éliminer la moyenne géométrique située 'à l'extérieur de l'intégrale, en introduisant les surfaces effectives et sections efficaces idéales de chaque antenne. En définitive, on exprimera le flux corrélé par unité de bande passante optique, en utilisant également l'angle solide de faisceau idéal de chaque antenne. Puis on procédera au changement de variables menant des coordonnées pupillaires aux fréquences spatiales. Alors, le flux total guidé par unité de bande bassante optique s'exprime sous la forme,

$$f_{01}^{12}(\sigma) = I_*(\sigma) \sqrt{\Sigma_{01}^1 \Sigma_{01}^2} \sqrt{\Omega_{01}^1(\sigma) \Omega_{01}^2(\sigma)} \int \mu_*(\mathbf{f}, \sigma) T_{01}^{12}(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{12}, \sigma) d\mathbf{f}, \quad (5.126)$$

le taux de couplage mutuel défini par l'Eq. (5.101) monochromatique sous la forme,

$$\eta_{01}^{12}(\sigma) = \sqrt{\eta_{01}^1 \eta_{01}^2} \sqrt{\Omega_{01}^1(\sigma) \Omega_{01}^2(\sigma)} \int \mu_*(\mathbf{f}, \sigma) T_{01}^{12}(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{12}, \sigma) d\mathbf{f}, \quad (5.127)$$

et finalement la visibilité complexe modale instantanée définie par l'Eq. (5.100) peut-être calculée en utilisant l'expression sur le plan de Fourier des flux guidés photométriquement,

$$V_{01}^{12}(\sigma) = \frac{\int \mu_*(\mathbf{f}, \sigma) T_{01}^{12}(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{12}, \sigma) d\mathbf{f}}{\sqrt{\int \mu_*(\mathbf{f}, \sigma) T_{01}^1(\mathbf{f}, \sigma) d\mathbf{f} \int \mu_*(\mathbf{f}, \sigma) T_{01}^2(\mathbf{f}, \sigma) d\mathbf{f}}}. \quad (5.128)$$

Le pendant des relations précédentes sur le plan-image optiquement conjugué à la source observée est,

$$f_{01}^{12}(\sigma) = I_*(\sigma) \sqrt{\Sigma_{01}^1 \Sigma_{01}^2} \sqrt{\Omega_{01}^1(\sigma) \Omega_{01}^2(\sigma)} \int B_*(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) L_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) \exp -2i\pi\sigma\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}^{12} d\boldsymbol{\alpha}, \quad (5.129)$$

le taux de couplage mutuel :

$$\eta_{01}^{12}(\sigma) = \sqrt{\eta_{01}^1 \eta_{01}^2} \sqrt{\Omega_{01}^1(\sigma) \Omega_{01}^2(\sigma)} \int B_*(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) L_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) \exp -2i\pi\sigma\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}^{12} d\boldsymbol{\alpha}, \quad (5.130)$$

et la visibilité modale :

$$V_{01}^{12}(\sigma) = \frac{\int B_*(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) L_{01}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) \exp -2i\pi\sigma\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}^{12} d\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{\int B_*(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) L_{01}^1(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\boldsymbol{\alpha} \int B_*(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) L_{01}^2(\boldsymbol{\alpha}, \sigma) d\boldsymbol{\alpha}}}. \quad (5.131)$$

Ces relations établissent le lien entre le flux corrélé dans une expérience interférométrique monomode et la distribution de brillance normalisée de la source observée. Elles généralisent les expressions du flux monomode guidé photométriquement dans l'interférogramme ou sur les voies de calibration photométrique.

5.4.3 Discussion

La visibilité mesurée par un interféromètre fibré est la visibilité de l'objet multipliée par le lobe d'antenne interférométrique. L'interférogramme monomode ne retourne qu'une seule fréquence spatiale moyennée sur le support de la fonction de transfert associée au lobe d'antenne. Il fixe ainsi l'échantillonnage sur le plan de Fourier et donc la taille du champ reconstituable par synthèse d'ouvertures. Cette réduction du champ de vue se traduit par une intégrale linéaire du spectre de l'objet sur une fonction de transfert, elle est pleinement assimilable à la réduction du champ de vue que produisent les estimateurs intégraux employés en interférométrie multiaxiale conventionnelle. Dans le cas idéal non turbulent le champ reconstituable est limité à une tâche d'Airy. Ceci pose de sérieux problème en termes d'imagerie, clairement les objets étendus sont pas accessibles à l'interférométrie monomode. Nous allons voir ultérieurement comment l'on peut remédier à ce problème.

Lorsque la source n'est pas résolue à l'échelle de la base interférométrique, on peut extraire l'objet des expressions intégrales définies sur le plan de Fourier. La visibilité modale ne diffère de $\mu_*(\sigma \mathbf{B}^{12})$ que par un terme de piston qui correspond à la phase d'aberration du lobe d'antenne interférométrique au centre du champ $\phi_L^{12}(\mathbf{0})$. Dans ce cas, un estimateur quadratique (tel que celui-présenté par l'Eq. (5.116) retourne une valeur non biaisée de la visibilité de l'objet. De plus cette valeur est strictement indépendante de toute phase turbulente. Il s'agit là d'une caractéristique essentielle, qui permet de comprendre pourquoi les mesures de visibilité modale effectuées avec des diamètres de petite taille ont permis d'atteindre un gain important en rapport signal à bruit. On peut établir dans ce cas que le rapport signal à bruit de la visibilité ne dépend pas du bruit de speckle responsable de la saturation du signal à fort flux dans le cas multimode, mais du nombre de photon moyen transmis par la fibre (qui varie comme un strehl moyen). Mais ceci est une autre histoire elle est en cours de développement dans le cadre de la thèse d'Eric Tatulli au LAOG, (Tatulli et al. [105]).

Lorsque les dimensions de la source est grande devant celle du lobe d'antenne interférométrique, sa visibilité complexe varie dans le support de la fonction de transfert du lobe. On introduit un biais sur la mesure de visibilité. Simplement on biaise la mesure de visibilité car cette dernière ne reflète pas la géométrie de l'objet seul, mais de l'objet multiplié par le lobe interférométrique. D'autre part la calibration photométrique du flux corrélé ne rend plus la visibilité modale rigoureusement indépendante (en module tout au moins) des conditions de turbulence atmosphérique. En considérant que l'objet est constant sur le support des lobes photométriques (au basses fréquences spatiales) et varie linéairement au premier ordre sur le support du lobe interférométrique, on aboutit à une expression approchée de la visibilité modale,

$$V_{01}(\sigma) = \mu_*(\sigma \mathbf{B}^{12}) \exp(i\phi_L^{12}(\mathbf{0})) + \frac{\partial \mu_*(\sigma \mathbf{B}^{12})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\int \mathbf{f} T_{01}^{12}(\sigma, \mathbf{f})}{\sqrt{\int T_{01}^1(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \int T_{01}^2(\mathbf{f}) d\mathbf{f}}} \quad (5.132)$$

obtenue à partir de l'équation Eq. (5.128), en injectant le développement de Taylor au premier ordre sur la visibilité complexe de la source,

$$\mu_*(\mathbf{f}) = \mu_*(\sigma \mathbf{B}^{12}) + \frac{\partial \mu_*(\sigma \mathbf{B}^{12})}{\partial \mathbf{f}} \cdot (\mathbf{f} - \sigma \mathbf{B}^{12}) \quad (5.133)$$

en prenant un gradient nul aux basses fréquences spatiales. Au premier ordre de l'approximation, la visibilité modale est la visibilité de l'objet (à un piston près) plus un terme purement turbulent dont l'amplitude est gouvernée par la pente du spectre de l'objet à la fréquence spatiale de la base interférométrique. Le terme additionnel est un terme est turbulent car son numérateur n'est plus exactement calibré par la moyenne géométrique des strehls associés aux lobes d'antennes photométriques

présents au dénominateur), comme c'est le cas (à une phase près), lorsque le spectre de la source est considéré comme étant constant. Ceci signifie que pour une source résolue par le lobe d'antenne interférométrique, les fluctuations du flux corrélé vont “décrocher” de la moyenne géométrique des fluctuations photométriques, autrement dit la calibration photométrique des visibilités, sera rendue inutile. Le même développement limité dans une analyse long-temps de pose renverrait,

$$V_{01}(\sigma) = \mu_*(\sigma \mathbf{B}^{12}) \exp(i\phi_L^{12}(\mathbf{0})) + \frac{\partial \mu_*(\sigma \mathbf{B}^{12})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\int \mathbf{f} T_{01}^{12}(\sigma, \mathbf{f})}{\sqrt{\int T_{01}^1(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \int T_{01}^2(\mathbf{f}) d\mathbf{f}}} \quad (5.134)$$

Nous n'entrerons pas plus loin dans les considérations liées à la turbulence atmosphérique.

Pour illustrer le biais statique introduit par la visibilité modale nous avons représenté sur la figure Fig.5.15 l'évolution du profil de visibilité d'un disque de brillance uniforme lissée sur le plan de Fourier à l'échelle du lobe pour des tailles croissantes de l'objet par rapport au lobe d'antenne. Nous nous sommes placés dans des conditions idéales, sans turbulence atmosphérique. Dans ce cas, le lobe d'antenne interférométrique est réel vaut le lobe d'antenne photométrique. Lorsque la taille relative de l'objet par rapport au lobe augmente (colonne de gauche), le profil de visibilité filtrée par l'antenne monomode se détache progressivement du profil de visibilité réel. Lorsque l'ouverture est hyper-résolue par le lobe d'antenne, le profil de visibilité modale se confond pleinement avec celui du lobe d'antenne qui coupe ‘a haute fréquence spatiale.

Le filtrage modal va briser l'invariance par translation dans le plan image. Pour illustrer ce point, nous nous plaçons toujours dans le cas idéal, les deux lobes d'antenne photométriques pointant dans la même direction, et nous examinons le profil de visibilité modale produit d'une binaire de séparation $\Delta\alpha$ centrée ‘a la position α_o en ce point :

$$B_*(\alpha, \sigma) = \frac{1}{1 + q(\sigma)} \delta(\alpha - \alpha_o) + \frac{q(\sigma)}{1 + q(\sigma)} \delta(\alpha - \alpha_o - \Delta\alpha) \quad (5.135)$$

L'application de la relation Eq. (5.131) donne,

$$\begin{aligned} V_{01}^{12}(\sigma) &= \frac{1}{1 + q'(\sigma)} \exp(-i\pi\sigma\alpha_o\mathbf{B}^{12}) + \frac{q'(\sigma)}{1 + q(\sigma)} \exp(-i\pi\sigma\alpha_o\mathbf{B}^{12}) \\ q'(\sigma) &= q(\sigma) \frac{L_{01}(\alpha_o + \Delta\alpha)}{L_{01}(\alpha_o)} \end{aligned} \quad (5.136)$$

ou q' est le rapport de la binaire biaisé par le filtre modal. dans le cas non turbulent la séparation angulaire de la binaire n'est pas biaisé par le filtrage modal. Le rapport de flux change suivant la position des composantes de la binaire dans le lobe d'antenne. Si la séparation est plus petite que le champ de vue du lobe, le biais sur le rapport de flux sera négligeable. A contrario si l'une des composantes stellaires sort du champ de vue, alors la visibilité modale sera nulle.

5.5 Vers le Multimode ?

La relation objet image d'un interféromètre monomode est codée dans le signal flux corrélé dans l'expérience inetrférométrique. Nous avons montré que les guides d'onde optiques pouvaient être appréhendés comme dans le formalisme des radio-astronomes. Cependant il existe une différence dans le traitement du lobe d'antenne interférométrique en optique et en radio qui est directement liée au fait que les effets de la turbulence sont faibles aux longueurs d'ondes centimétriques. Le lobe d'antenne interférométrique radio est toujours défini comme un lobe positif i.e la moyenne géométrique

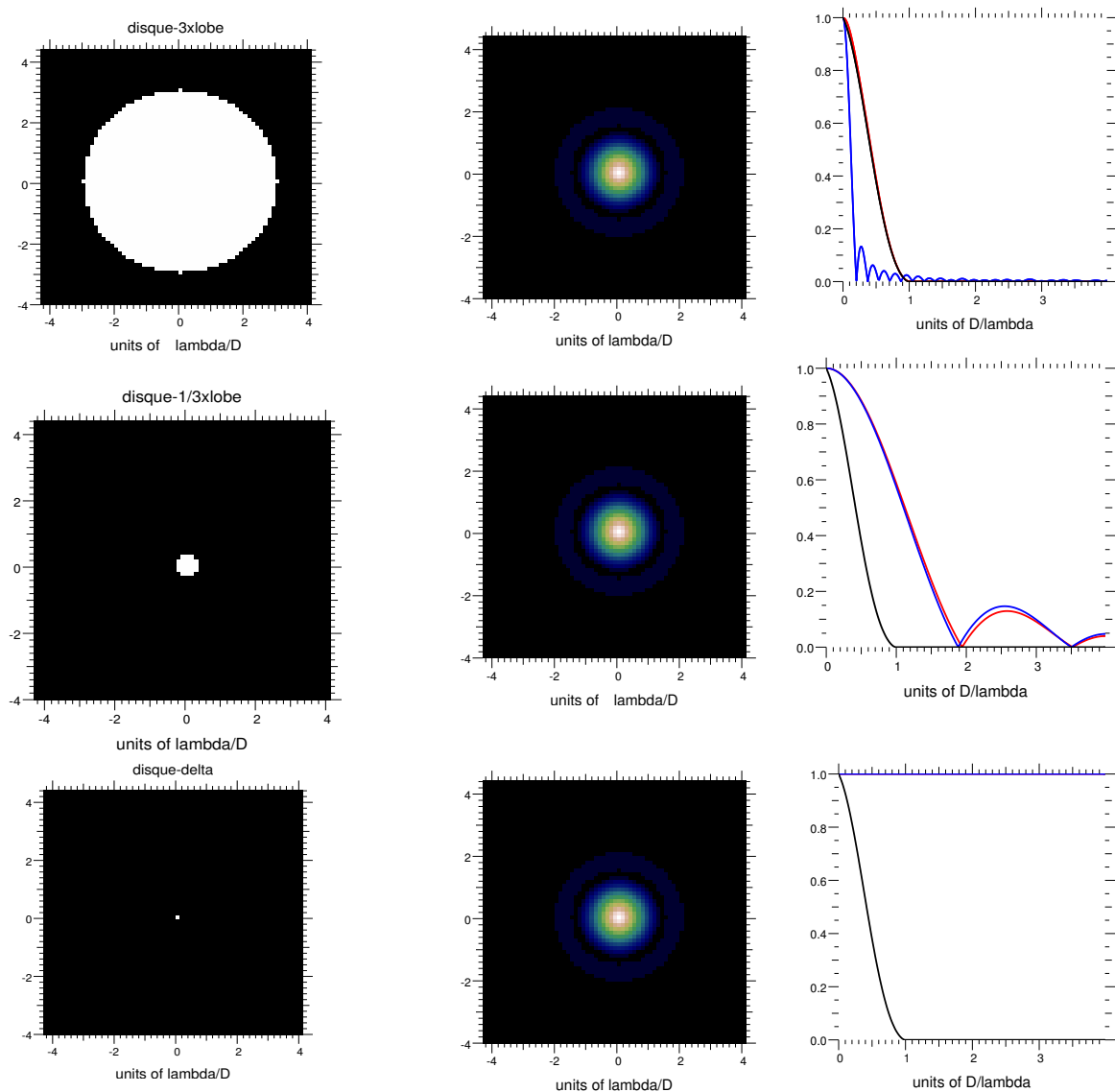


Fig. 5.15 – Evolution du profil de visibilité avec la dimension d'un disque uniforme (colonne de droite). Ligne bleue : profil réel. Ligne rouge : profil filtré par le lobe (profil noir). La fibre est incapable de déceler la structure spatiale de l'objet en dehors de son champ de vue.

des lobes photométriques. Seuls les effets de piston différentiel moyens et dériveur de pointage sont pris en compte en introduisant dans les visibilitées finales l'atténuation due au piston.

Du fait des aberrations pupillaires, le lobe d'antenne interférométrique optique est complexe. Il est la moyenne géométrique des lobes photométriques en module mais il possède une phase sur le ciel. Par des considérations liées au caractère hermitique de la transformée de Fourier d'une image on peut se rendre compte, que instantanément tout au moins, c'est la partie réelle du lobe interférométrique qui intervient dans la reconstruction d'image⁷. D'autres auteurs ont tenté de modéliser

⁷On pourra par exemple reconstruire une la distribution de brillance de la source 'a la "Double Fourier" en utilisant le degré de cohérence de l'interférogramme FLUOR pour se rendre compte du phénomène...s'il y a des aberrations, la partie réelle du lobe peut être négative, il faut alors ajouter une contrainte de positivité à l'image reconstruite

le lobe d'antenne à la manière des interférométristes radio (Guyon [39]), i.e en définissant le lobe d'antenne interférométrique comme la moyenne géométrique des lobes photométriques. Cette approche conduit à une expression incorrecte de la relation objet-image. [27] sont arrivés à une expression équivalente de la visibilité sans calibration photométrique de l'interférogramme, i.e $\frac{|f_{01}^{12}|}{f_{01}^1 + f_{01}^2}$ et ont confirmé expérimentalement le biais induit par la taille finie du lobe sur le profil de visibilité d'un disque uniforme.

De part sont caractère statique, le lobe d'antenne est facilement pris en compte dans les procédures de réduction de données (CLEAN) ou l'on divise par le lobe. On peut remarquer que dans la plupart des situations radio-astronomiques le champ de vue du lobe est bien plus grande que la source étudiée et la pondération de l'image par le lobe normalisé à l'origine est quasi-unitaire. C'est là une différence de première importance avec le lobe d'antenne défini aux longueurs d'onde optiques. Comment s'affranchir des effets de champ aux longueurs d'onde optiques ?

Guyon [39] a suggéré une méthode intéressante pour augmenter le champ de vue des fibres sur le ciel, il s'agit de subdiviser la pupille en sous-pupilles et fibrer chacune des sous-pupilles. Les sous-pupilles seront recombinaées sans perte de flux par paires toutes les paires codant la même fréquence spatiale. On peut imaginer une méthode instrumentale différente dans la partie suivante dont je vais décrire le principe.

Le caractère monomode de la relation objet-image en optique se résume à l'analyse de la cohérence sur le point central d'une image. (cette notion est relative 'à la direction pointée par les lobes'. (On se convaincra facilement qu'un trou de diamètre infiniment fin placé au foyer d'un télescope est une antenne optique de surface effective plane (la pupille) mais de section efficace nulle (pas de flux transmis)). Dès lors, pourquoi ne pas sonder la cohérence partielle de la source point par point en balayant celle-ci dans deux directions orthogonales ? En partant d'une situation on les lobes pointent sur le photocentre de la source (le centrage étant assuré à 3 télescopes par référence de phase ou en utilisant la clôture de phase), on peut le faire en déplaçant continûment la fibre devant la source imagée au foyer du télescope ou en introduisant un angle de tip-tilt sur une des entrées de l'interféromètre. Prenons le flux dans un canal de calibration photométrique, et enregistrons le flux monomode guidé en fonction du décentrage. Soit α_o ce décentrage, conformément à l'Eq. (5.55)

$$f_{01}(\alpha_o \sigma) \propto \int B_*(\alpha, \sigma) L_{01}(\alpha - \alpha_o, \sigma) d\alpha \quad (5.137)$$

relation que l'on peut à nouveau interpréter comme une convolution sur la coordonnée angulaire ! On reconstruit une relation objet-image classique, pour laquelle le lobe photométrique apparaît, et c'est tout naturel comme la fonction d'étalement de point. Autrement dit, on peut reconstruire en laboratoire point par point (pour divers angles de tilt α_o) le lobe d'antenne instrumental en étudiant sur un canal photométrique les variations du flux transmis par le guide lors du déplacement d'une source non résolue. Cette procédure d'acquisition du lobe d'antenne statique relève d'un procédé analogue à du *mosaicing*. Le champ de vue reconstruit sur l'image serait limité par l'amplitude du scan. Le nombre de fréquences indépendantes accessibles par la résolution du tilt introduit.

En asservissant les défocalisations introduites d'une entrée interférométrique à l'autre, de manière à contrôler le tip-tilt différentiel avec précision (pour ne pas détruire le lobe interférométrique), on enregistrera en parallèle le flux couplé dans la voie interférométrique,

$$f_{01}^{12}(\alpha_o, \sigma) \propto \int B_*(\alpha - \alpha_o, \sigma) L_{01}^{12}(\alpha, \sigma) \exp(-2i\pi\sigma \mathbf{B}^{12} \alpha_o) d\alpha \quad (5.138)$$

L'acquisition de la fonction étalement de point interférométrique étant obtenue par l'observation

d'un calibrateur non résolu à l'échelle de la base interférométrique. D'une manière analogue à la photométrie, on reconstruira point par point dans le plan image une relation multimode usuelle autour de la fréquence de la base. Il est certain que la méthode requiert un contrôle absolu du tip-tilt et du tip-tilt différentiel entre les deux voies. Il reste à étudier si cette procédure est envisageable sur le ciel. On pourra envisager de scanner angulairement le plan-image à une vitesse plus grande que le temps de cohérence atmosphérique. La reconstruction d'une relation objet image permettant alors d'envisager une estimation linéaire ou quadratique de points indépendants de visibilité reconstruite autour de la fréquence de la base. Cette méthode permettrait de s'affranchir des limitations de champ de vue en transférant le problème d'imagerie monomode vers un problème d'imagerie multimode, tout en gardant le confort de l'optique monomode du point de vue de la recombinaison interférométrique.

5.6 Conclusion

A mon arrivée au LAOG, la théorie du couplage monomode électromagnétique d'une pupille pour une source d'extension angulaire quelconque n'avait jusqu'à pas été formulée. Les développements théoriques effectués au cours de ma thèse, ont permis de relier l'expression du flux guidé et du flux corrélé dans une expérience monomode fibrée via la théorie de la cohérence partielle, et à la distribution de brillance spatio-spectrale de l'objet. Il apparaît clairement que la fibre optique agit de ce point de vue comme une antenne radio monomode, un résultat qui était plus largement intuitif que véritablement démontré. Le degré de cohérence spatial effectivement mesuré est celui de l'objet multiplié par le lobe d'antenne interférométrique, résultant du produit de corrélation spatiale des pupilles éclairées en retour inverse par le mode fondamental du guide. Ce résultat a été publié à la Semaine Française De l'Astronomie 2001 (Mège& Malbet [65]). Les développements menés conduisent à des expressions analogues à celles obtenues indépendamment par [27], seule la calibration de la photométrie de la visibilité mesurée dans l'expérience est différente. Ces derniers étudient le contraste, i.e. le flux corrélé normalisé à la moyenne arithmétique des flux guidés dans chaque voie. Nous présentons, ici la visibilité modale comme le flux corrélé normalisé à la moyenne géométrique des flux guidés sur chaque voie. C'est la visibilité "calibrée photométriquement" dans une recombinaison monomode. La différence essentielle entre les deux est que pour une source compacte non résolue à l'échelle d'une pupille individuelle, le module de la seconde est *strictement* indépendante de la turbulence atmosphérique et vaut celui de l'objet, ce qui n'est vrai pour un estimateur du genre "contraste" que lorsque le lobe d'antenne interférométrique est égal au lobe d'antenne photométrique de chaque voie, i.e. dans un cas non turbulent avec deux voies parfaitement symétriques en termes de pupilles effectives.

Le lobe d'antenne interférométrique est un lobe d'antenne *complexe* ayant une phase sur le ciel. Tous les effets de la turbulence sont concentrés dans la définition du lobe d'antenne interférométrique. L'intégration du flux stellaire dans le lobe d'antenne interférométrique produit instantanément un piston différentiel en sortie de guide qui résulte non seulement du piston différentiel présent sur chacune des pupilles mais aussi sur mais aussi du couplage des aberrations d'ordre supérieur. En long temps de pose en supposant que les flux guidés sur chacune des voies sont décorrélés et que la variance résiduelle de la phase atmosphérique sur chacune des pupilles effectives est identique sur chacune des voies, on obtient une visibilité modale long temps de pose atténuée de l'exponentielle de la variance de ce piston différentiel, par rapport au cas non turbulent. Il reste que la visibilité modale idéale est biaisée par les effets de champ du à l'extension angulaire finie des lobes d'antenne non turbulents. Pour une source compacte, le biais est négligeable. Une estimation quadratique de la visibilité modale gelant les effets

de piston différentiel renvoie la visibilité de l'objet. Mais nous montrons que lorsque l'on ne peut plus négliger la taille des pupilles devant celle de l'objet, le flux corrélé ne suit plus instantanément la photométrie (au sens de la moyenne géométrique des flux guidés). Dans ce cas l'estimateur quadratique de visibilité modale n'est plus parfaitement insensibilisé à la turbulence atmosphérique. Cette prédiction théorique mériterait d'être plus largement quantifiée. Elle est directement reliée à la magnitude du gradient du degré de cohérence spatial de l'objet sur le support du lobe interférométrique dans le plan de Fourier.

Chapitre 6

Conclusion

Le travail mené au cours de cette thèse, m'a permis de livrer un code numérique permettant de rendre compte de la propagation au sein d'une fibre optique circulaire. Le code numérique résout l'équation de propagation scalaire dans le guide d'onde et permet de faire une analyse modale complète en termes de modes rayonnés dans la gaine et des modes guidés dans le substrat. Le modèle est appliqué à l'injection d'une source ponctuelle éventuellement dégradée par la présence d'aberrations. Cette première application permet de mieux comprendre la physique de la réjection des modes rayonnés dans la gaine du guide.

Le modèle permet de tracer des cartes du taux de réjection en énergie des modes rayonnés dans la longueur du guide sur une région du plan transverse donnée. La grandeur clé à examiner est la distribution spectrale des modes rayonnés excités dans le guide, sur l'espace des fréquences d'oscillations spatiales associées.

- L'amplitude du taux de réjection est contrainte par le rapport entre *la puissance normalisée guidée et la puissance normalisée rayonnée* qui fixe l'amplitude du point initial du taux de réjection dans la longueur du guide. La présence d'aberrations augmente significativement ce rapport.
- L'échelle caractéristique de décroissance du taux de réjection dans l'axe est dictée par l'étalement de la distribution spectrale des modes rayonnés.
- Il faut tenir également compte du terme croisé (terme de battement) entre le paquet d'onde rayonné et le mode fondamental du guide. Ce terme est dominant lorsque l'on considère des régions d'intégrations transverses voisines de celle du coeur de fibre.

La réjection du paquet d'onde rayonné seul et le terme de battement varient en amplitude de manière contraires avec l'extension spatiale du domaine transverse choisi pour définir la région d'intégration, si bien que nous obtenons dans le cas non perturbé un optimum pour une région d'intégration de l'ordre de 5 rayons de coeur. Le nombre de pixels choisis dans la longueur de la fibre nous permet d'atteindre un taux de réjection de l'ordre de 10^{-5} en tenant compte du battement bout de fibre à 3000λ et une valeur de 10^{-6} si l'on néglige l'influence du battement. Dans le cadre du nulling on pourra le faire puisque le mode guidé est strictement annulé par la recombinaison en opposition de phase du signal guidé. Néanmoins ce constat n'est vrai que pour la composante stellaire du signal, ce ne sera pas le cas pour la composante planétaire et pour les signaux de fuite du coronographe interférentiel. La prise en compte du battement induit par ces composantes est absolument nécessaire puisque finalement c'est précisément ce terme d'erreur résiduelle qui va limiter la réjection au voisinage du coeur. Ce battement qui va gouverner la physique de l'erreur du front d'onde aux longues distances. Il ressort

également de cette étude que la pente du taux de réjection dans la longueur de guide (renseignant sur la vitesse de la réjection) est une grandeur locale. La transition au régime monomode idéal est une transition asymptotique et **contrairement à une idée intuitive qui semble être couramment admise, il semble difficile d'extrapoler une mesure locale de la pente du taux de réjection aux distances de propagation ultérieures dans l'axe de la fibre.** Les courbes présentées dans ce mémoire illustrent très bien l'infléchissement de cette pente aux grandes longueurs de propagation. Pour perdre encore quelques magnitudes sur le taux de réjection, il faudra donc injecter la tâche d'Airy avec un champ numérique plus large dans la longueur du guide, i.e un échantillonnage plus fin de la constante de propagation axiale. La présence d'aberrations de type defocus (étalement de la tache d'airy), ou tip-tilt (décentrage de la tâche d'airy) sur le plan de la pupille d'injection modifie la distribution spectrale des modes rayonnés. Des fréquences spatiales plus faibles sont excitées. Les aberrations induisent une modification de la fréquence de battement avec le mode fondamental (déplacement du centroïde de la distribution, un élargissement de la distribution spectrale, ce qui joue compte-tenu de ce qui vient d'être dit plutôt en faveur d'une réjection plus rapide des modes rayonnés, mais malheureusement un déséquilibre du rapport entre la puissance rayonnée normalisée et la puissance guidée (qui exprime la perte de couplage) en faveur de la première, augmentant de manière homothétique l'amplitude du taux de réjection. (Cette augmentation est traduite en termes d'une augmentation significative de l'aire sous la distribution spectrale des modes rayonnés). Le modèle semble confirmer une chose, c'est une grande sensibilité du taux de réjection aux aberrations. De ce point de vue et qualitativement il semble difficile d'atteindre des réjection de l'ordre de grandeur souhaité pour l'interférométrie nulling 10^{-6} ou 10^{-7} , sans un contrôle poussé des aberrations. Pour le tip-tilt par exemple le taux de réjection minimal passe de 10^{-5} à 2.10^{-3} pour un décentrage d'un dixième de la tâche d'Airy !. Il faudra affiner la résolution des chartes de réjection du point de vue de la force des aberrations.

La deuxième partie est consacrée à la formalisation de la relation objet-image dans un système interférométrique fibré, dans le cas d'un filtrage considéré comme étant purement monomode (lorsque l'on néglige les modes rayonnés). Je montre que l'on ne mesure pas la visibilité de l'objet, mais *une visibilité modale*, qui est en toute généralité dépendante de la source et des conditions de seeing. Instantanément, la visibilité modale se comporte comme une estimation linéaire intégrale pris sur le pic haute-fréquence d'un interférogramme multimode multiaxial. La relation objet-image ne s'apparente pas à celle obtenue dans le cas d'une recombinaison plan-pupille ordinaire. En imageant la source sur la tête de chaque guide monomode, on fait de l'interférométrie plan-image avec réduction de champ. L'intégration linéaire sur le plan de Fourier traduit la réduction du champ de vue sur le ciel opérée par le guide d'onde (analyse du point central d'un pseudo interférogramme multimode). La relation objet-image n'est plus identique au type de relation objet-image obtenue pour un système invariant par translation. En revanche, elle s'apparente exactement à celle des radio-interférométristes. La recombinaison interférométrique fibrée permet de mesurer une corrélation de photons intégrés dans un certain lobe d'antenne interférométrique, sensible aux conditions atmosphériques. Le lobe d'antenne interférométrique est un lobe d'antenne complexe dans le cas général, dont le module est égal à la moyenne géométrique des lobes de chacune des antennes. Les formules obtenues permettent de généraliser la notion de taux de couplage monomode au cas d'une source étendue. Elles permettront de simuler la recombinaison interférométrique d'une source étendue dans le cas du simulateur d'AMBER. Il n'est pas nécessaire de décomposer numériquement la source, en points sources élémentaires. Les formules établies sur la base d'une propagation rigoureuse de la cohérence partielle dans un in-

terféromètre montrent clairement que l'on ne mesure pas l'objet mais à l'instar des radioastronomes l'objet multiplié par le lobe d'antenne interférométrique. Notons que dus aux effets de la turbulence et contrairement à la radio-astronomie ce lobe est à priori complexe ayant une phase sur le ciel. Contrairement au domaine radio, il ne se construit pas seulement comme la moyenne géométrique des lobes photométriques de chaque antenne individuelle. Je profite du formalisme développé dans ce travail pour définir une base de correction adaptative optimale du point de vue de la stabilisation des lobes face aux conditions de turbulence.

Il est important de constater que le cas d'un objet dont la visibilité est constante sur le support de la fonction de transfert interférométrique est un cas marginal dans la théorie générale. Cette hypothèse de non-résolution angulaire de l'objet par une pupille individuelle, induit deux effets particuliers qui sont à la base du succès de la calibration photométrique pour les interféromètres fibrés munis de petites ouvertures :

- La visibilité calibrée photométriquement est non biaisée et correspond à celle de l'objet
- La visibilité calibrée photométriquement est rigoureusement insensible à la turbulence atmosphérique

Je montre par un argument mathématique que lorsque la visibilité de l'objet présente une variation notable sur le support du lobe d'antenne typiquement sur un intervalle fréquentiel de l'ordre de $\frac{D}{\lambda}$, la visibilité calibrée photométriquement n'est plus celle de l'objet mesurée et qui plus est devient dépendante de la turbulence atmosphérique. Cette prévision théorique a une signification profonde : pour une source étendue par rapport au lobe d'antenne, les fluctuations du signal interférométrique ne suivent plus à la lettre les fluctuations de la photométrie. Cette prévision est fondamentale puisqu'elle remet en cause le principe même de la calibration photométrique.

La limitation du champ de vue induite par la multiplication avec le lobe d'antenne est à l'origine d'un biais sur les mesures, dont il faudra s'affranchir en minimisant les effets de champ, en augmentant la taille du lobe (couplage de sous-pupilles de tailles plus réduites) et en conservant la calibration photométrique du signal. Cette approche a été proposée dans la littérature mais ce n'est pas la seule envisageable. De toute manière elle sera toujours prise en défaut au pour des sources plus grandes que le lobe (agrandi). Il faut donc se pencher sur des méthodes de reconstruction d'image qui s'affranchissent *systématiquement* des effets de champ de vue.

Une première approche est de diviser l'image reconstruite partir des mesures (non calibrées photométriquement) du flux corrélé par le lobe d'antenne interférométrique (modélisé avec les données du suiveur de frange et de l'AO), et de calibrer l'image définie à un flux près photométriquement après la reconstruction d'image. Les propriétés du lobe d'antenne long-temps de pose sont tout a fait connues :

- Le lobe non turbulent modélisable ou reconstituable point par point en laboratoire
- La variance du piston différentiel (contrôlée par un suiveur de franges)
- la variance résiduelle de la phase atmosphérique post correction adaptative

Une fois l'image reconstruite et divisée par le lobe on pourra la normaliser photométriquement. Elle sera définie à la moyenne géométrique des flux monomodes guidés à l'injection d'une source non résolue sur chaque pupille en conditions non turbulentes. Cette moyenne peut être déterminée par l'expérience en laboratoire ou par un modèle.

La dernière possibilité est enfin de transférer le problème monomode en un problème d'imagerie interférométrique multimode invariant par translation en recouvrant plusieurs différences spatiales indépendantes sur le support du lobe d'antenne interférométrique par mosaicing. La présente analyse tient en long temps de pose. Le cas d'une estimation quadratique de la visibilité modale n'est pas mathématiquement équivalente à une estimation quadratique classique telle qu'on la rencontre

interférométrie multimode. Elle dépasse le cadre de ce travail et pourrait en être le prolongement naturel.

Annexe A

Annexes

Les annexes suivantes présentent la propagation d'un faisceau gaussien en espace libre et après collimation. Elles sont malheureusement écrites en anglais !

A.1 Free-space propagation at the output of a SMW

A.1.1 Fresnel diffraction of Gaussian beams

As a starting point let us consider the free-space propagation of a Gaussian mode at the output of a single-mode waveguide. This one shares the same properties as *Gaussians beams*. Theory of Gaussian beams has already been designed for the purpose of propagation studies associated to fundamental modes in optical cavities [60],

$$\begin{aligned} G_{01}(\boldsymbol{\rho}, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi w_o^2}} \frac{z_o \exp(i\bar{k}z)}{iq_z} \exp\left(\frac{i\bar{k}|\boldsymbol{\rho}|^2}{2q_z}\right) \\ G_{01}(\boldsymbol{\rho}, 0) &= \text{LP}_{01}(\boldsymbol{\rho}) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

where z refers to the longitudinal coordinate after the waveguide, $\boldsymbol{\rho}$ to a spatial transversal coordinate, q_z is the *complex longitudinal coordinate*, at the output of the waveguide defined by,

$$q_z = z - iz_o \quad (\text{A.2})$$

z_o defines the *depth of the Rayleigh zone* of the beam,

$$z_o = \frac{\bar{k}w_o^2}{2} \quad (\text{A.3})$$

R_z , the *radius of curvature* of the wavefront.

$$R_z = z \left(1 + \frac{k^2 w_o^4}{4z^2} \right) = z \left(1 + \frac{z_o^2}{z^2} \right) \quad (\text{A.4})$$

w_z its the *spot size* of the Gaussian beam,

$$\frac{w_z}{w_o} = \left(1 + \frac{4|z|^2}{\bar{k}^2 w_o^4} \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{z^2}{z_o^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

The spot size optical path dependency shows that due to diffraction the beam spatially broadens as it propagates. The minimal value of the spotsize w_o is usually referred as to the *waist* of the Gaussian

beam. The quantity $2w_o$ is usually referred to as the *mode field diameter* of the Gaussian beam exiting the waveguide. The complex on-axis coordinate q_z is of practical importance : real part of q_z gives a measurement of the distance separating the associated front plane from that of the waist plane ; imaginary part of q_z gives the value of the beam's Rayleigh depth. The *Rayleigh zone* is also one of its major characteristics. It is defined on the basis of the optical-path dependency of the phase associated with $\frac{1}{iq_z}$

$$\phi_z = \text{atan} \frac{z}{z_o} \quad (\text{A.6})$$

Far away from the output of the single-mode waveguide, especially far from the Rayleigh zone, the Gaussian beam “looks like” a spherical wave of curvature radius $R_z \simeq |z|$ spatially limited in each front plane by a diaphragm whose size is of order w_z . The phase ϕ_z tends toward the limiting value $\frac{\pi}{2}$. In the Rayleigh zone however, this last behaves linearly with the optical path, while the curvature radius tends toward infinity : the Gaussian beam better “looks like” a collimated plane wave, with spatial extent w_o . The semi-angle of divergence of the light beam can be found when $|z|$ tends toward infinity by taking the limiting value of,

$$\theta_o = \lim_{z \rightarrow \infty} \text{atan} \left(\frac{w_z}{z} \right) = \frac{w_o}{z_o} \quad (\text{A.7})$$

Behind the Rayleigh zone, significant diffraction of the beam occur in a cone of divergence sustained by a semi-angle of order θ_o . Another common way to express the Gaussian beam is the following one,

$$\begin{aligned} G_{01}(\boldsymbol{\rho}, z) &= \exp(i\bar{k}z) \\ &\sqrt{\frac{2}{\pi w_z^2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{w_z^2}\right) \exp(-i\phi_z) \exp\left(\frac{i\bar{k}|\boldsymbol{\rho}|^2}{2R_z}\right) \\ G_{01}(\boldsymbol{\rho}, 0) &= \text{LP}_{01}(\boldsymbol{\rho}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

By combining Eq. (A.3) and Eq. (A.7) one can be easily demonstrated that *beam étendue* of such a beam is given by,

$$\begin{aligned} E_o &= S_o \Omega_o = \bar{\lambda}^2 \\ &\text{with} \\ S_o &= \pi w_o^2 \quad \Omega_o = \pi \theta_o^2 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Far-field pattern of a Gaussian mode

Considering the limit when $z \rightarrow \infty$ in Eq. (A.1) or Eq. (A.8) and Fraunhofer conditions of observation (when the spherical nature of the propagating wavefronts can be neglected), the angular distribution of the so-called *far-field pattern* is derived from the fundamental guided mode by a power normalized Fourier transform,

$$\begin{aligned} G_{01}(\mathbf{r}, z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z G_{01}(\boldsymbol{\rho} = z\mathbf{r}, z) \\ &= \exp(i\bar{k}z) \text{LP}_{01}(\boldsymbol{\rho}) \frac{i\bar{k}}{2\pi} \exp(i\bar{k}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}) \\ &= -i \exp(i\bar{k}z) \sqrt{\frac{2}{\pi \theta_o^2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{\theta_o^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

where \mathbf{r} is the angular span of the far-field pattern viewed from the output plane of the waveguide.

A.2 beam-collimation

In AMBER, the Gaussian beam as to be carried from the output of the spatial filter to the imaging system over distance of a few meters. Since the divergence of the initial beam is important at the output of the Single Mode Fiber, it has to be collimated. The optical system dedicated to this task is a thin lens with equivalent focal length F . If diffraction effects due to lens stopping are neglected, the incident Gaussian beam is converted into to another one which characteristics can be well determined. Let suppose that the lens is placed at a distance $z = L$ from the output of the SMW on the optical path. The power normalized electric field at the back-side side of the lens, is spherically corrected as follow,

$$G_{01}(\boldsymbol{\rho}, L^+) = G_{01}(\boldsymbol{\rho}, L^-) \exp\left(-\frac{i\bar{k}|\boldsymbol{\rho}|^2}{2F}\right) \quad (\text{A.11})$$

where L^+ and L^- refer respectively to the upper right and lower left limits of $z = L$ and correspond to the optical-path location of the back and front side of the lens. Under this assumption, we can immediately see that the output wavefront is also Gaussian with a new parameter q_L^+ , defined by,

$$\frac{1}{q_L^+} = \frac{1}{q_L} - \frac{1}{F} \quad (\text{A.12})$$

Precedent formula is no more than a generalized lens law for Gausssian beams conjugaison. Writing $q_L^+ = z_L^+ - iz_0^+$, and $q_L^- = L - iz_0$, we obtain a set of formulae,

$$\begin{aligned} \frac{z_L^+}{F} &= \frac{\left(\frac{F}{L} - 1 - \frac{z_0^2}{F^2} \frac{F^2}{L^2}\right)}{\left(\frac{F}{L} - 1\right)^2 + \frac{z_0^2}{F^2} \frac{F^2}{L^2}} \\ \frac{z_0^+}{z_0} &= \frac{\frac{F^2}{L^2}}{\left(\frac{F}{L} - 1\right)^2 + \frac{z_0^2}{F^2} \frac{F^2}{L^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

z_0^+ refers to the Rayleigh depth of the emergent beam, and z_L^+ is a measurement of the algebraic distance between its waist and the output front plane considered at $z = L$. If $z_L^+ > 0$ the waist lies before the output front plane on the optical path and the emergent beam is a divergent one. On the contrary, if $z_L^+ < 0$ the waist lies after the output front plane and the beam converges. The particular case $z_L^+ = 0$ corresponds to an emergent beam whose waist coincides exactly with the output plane $z = L$. The optimal strategy for secondary beam collimation is to use the particular case where $z_L^+ = 0$. We have already seen that this case corresponds to an emergent beam whose waist coincides perfectly with front plane $z = L$. To do this, the optical system must be placed on the optical path in such a way that the following second order equation must be satisfied,

$$\frac{L^2}{F^2} - \frac{L}{F} + \frac{z_0^2}{F^2} = 0 \quad (\text{A.14})$$

This equation is strictly equivalent of $R_L = F$ that is to say a perfect correction of the curvature of the incident wavefront. For a given focal length F , the solution is,

$$\frac{L}{F} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{z_0^2}{F^2}}}{2} \quad (\text{A.15})$$

For extremely low values of the primary Rayleigh depth z_0 compared to the imaging system focal length, the solution of this equation is either to take a unitary $\frac{L}{F} \simeq 1$ ratio either to take an extremely small one $\frac{L}{F} \simeq \frac{z_0^2}{F^2}$. The last case has to be discarded because it corresponds to a lens placed in the

primary beam Rayleigh zone : the output beam Rayleigh depth will remain unchanged (that means extremely small !). As a consequence, the output beam will not be kept collimated over a large distance of propagation. On the contrary the first case is in practice very interessant since it corresponds to the optimum collimation. In that case the output beam Rayleigh depth $\frac{z_0^+}{z_0} \simeq \frac{F^2}{z_0^2}$ is rejected toward infinity. Working with $L \simeq F = 84\text{mm}$, $z_0 = 25.2\text{microns}$, leads to a value of $z_0^+ = 280\text{m}$. That will be the order of magnitude for pratical applications in AMBER. The curvature correction of the primary beam makes the complex amplitude of the collimated beam propagate like a Gaussian-modulated plane wave in its own Rayleigh zone of infinite depth.

$$G_{01}(\boldsymbol{\rho}, z) = i\sqrt{\frac{2}{\pi w_L^2}} \exp(i\bar{k}z) \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{w_L^2}\right) \quad (\text{A.16})$$

with $z \geq L$

Bibliographie

- [1] Abbe E. 1893, *Archiv. Mikroskopische Anat.* 9, 413
- [2] Abramovitz, *Handbook of mathematical functions.*
- [3] Armstrong, J. T. et al. 1997, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 29, 1234
- [4] Babcock 1953, *The possibility of compensating astronomical Seeing*, *PASP*, 65, pp. 229
- [5] Berger J.-P., Rousselet-Perraut K., Kern P., Malbet F., Schanen-Duport I., Reynaud F., Haguenaier P., Benech P. 1999, *A&A*, 139, 173.
- [6] Baldwin J. E., Haniff C. A., Mackay C. D., Warner, P. J. 1986, *Closure phase in high-resolution optical imaging*, *Nature*, 320, pp. 595–597.
- [7] , Baldwin J. E., Beckett M. G., Boysen R.C., Burns D., Buscher D. F., Cox G. C., Haniff C. A., Mackay C. D., Nightingale N. S., Rogers J., Scheuer P. A. G., Scott T. R., Tuthill P. G., Warner P. J., Wilson D. M. A., Wilson R. W. 1996, *The first images from an optical aperture synthesis array : mapping of Capella with COAST at ls two epochs*, *A&Ap*, 306, pp. L13.
- [8] Benson J. A. Hutter, D. J. Elias N. M., Bowers P. F. Johnston K. J., and Hajian A. R., Armstrong J. T. Mozurkewich D., Pauls, T. A., Rickard L. J., Humme C. A., White N. M., Blacok D., Deniso C. S. 1997, *Multichannel optical aperture synthesis imaging of $\lambda 1$ URSAE majoris with the Navy prototype optical interferometer*, *ApJ*, 114, 1221–1226.
- [9] Berio P. & Mourard D. What is the portion of perturbative light allowed in the spatial filter to reach the 10^{-4} accuracy level. In : *AMBER internal memo AMB-IGR-003*, p 48.
- [10] Born M., Wolf E. 1980, *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light.* Oxford : Pergamon Press, 6th corrected ed.
- [11] Borra, E. F. 1994, *Scientific American*, 270, 76
- [12] Cagigal, M. P. & Canales, V. F. 2000, *Optical Society of America Journal*, 17, 903
- [13] Chelli A., Mariotti J.M. 1986, *Visibility and phase analysis for image and pupil-plane interferometry at optical wavelengths*, *A&A*, mar, 157, pp 372-382.
- [14] Colavita, M. M. 1999, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 31, 1407
- [15] Colavita M. M. 2000, *Keck Interferometer : progress report.* In : Léna P., Quirrenbach A. (eds), *Interferometry in Optical Astronomy. SPIE 4006*, Munich (Germany), in press

- [16] Colavita M. M., Wallace J. K., Hines B. E., Gursel Y., Malbet F., Palmer D. L., Pan X. P., Shao M., Yu J. W., Boden A. F., Dumont P. J., Gubler J., Koresko C. D., Kulkarni S. R., Lane B. F., Mobley D. W., van Belle G. T., 1999, *ApJ* 510, 505
- [17] Connes P., Froehly C., Facq P. 1984, A Fiber-Linked Version of Project Shaklan TRIO. In : Longdon N., Melita O. (eds.) *Proc. ESA Colloq., Kilometric Optical Arrays in Space*. ESA, Cargèse, p. 49
- [18] Conan J.M. 1994, Jean-Marc Conan, Etude de la correction partielle par optique adaptative, Ph. D. Dissertation, Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 1995-1.
- [19] Coudé du Foresto V., Ridgway S. 1991, FLUOR : a Stellar Interferometer Using Single-Mode Infrared Fibers. In : Beckers J., Merkle F. (eds.) *Proc. ESO conf., High-resolution imaging by interferometry II*. ESO, Garching, 731
- [20] Coudé du Foresto V. 1996, Fringe Benefits : the Spatial Filtering Advantages of Single-Mode Fibers. In : Kern P., Malbet F. (eds) *Proc. AstroFib'96, Integrated Optics for Astronomical Interferometry*. Bastianelli-Guimand, Grenoble, p. 27
- [21] Coudé du Foresto V., Perrin G., Mariotti J.-M., Lacasse M., Traub W. 1996, The FLUOR/IOTA Fiber Stellar Interferometer. In : Kern P., Malbet F. (eds) *Proc. AstroFib'96, Integrated Optics for Astronomical Interferometry*. Bastianelli-Guimand, Grenoble, p. 115
- [22] Coudé Du Foresto V., Perrin G., Ruilier C., Mennesson B. P., Traub, W. A., & Lacasse, M. G. 1998, *Proceedings of SPIE*, 3350, 856
- [23] Coulman, C. E., Vernin, J., Coqueugniot, Y., & Caccia, J.-L. 1988, *Appl. Optics*, 27, 155
- [24] Davis J., Tango W. J., Booth A. J., Brummelaar T. A. T., Minard R. A., & Owens, S. M. 1999, *MNRAS*, 303, 773
- [25] Davis, J., Tango, W. J., Booth, A. J., Thorvaldson, E. D., & Giovannis, J. 1999, *MNRAS*, 303, 783
- [26] Duvert Gilles ; Mouillet, David ; Malbet, Fabien ; Berio, Philippe ; Forveille, Thierry ; Aristidi, Eric ; Hofmann, Karl-Heinz ; Mege, Pierre 2000, AMBER data simulator in : *Proc. SPIE Vol. 4006*, p. 217-223, *Interferometry in Optical Astronomy*, Pierre J. Lena ; Andreas Quirrenbach ; Eds.
- [27] Dyer, S. D. & Christensen, D. A. 1999, *Optical Society of America Journal*, 16, 2275
- [28] Fizeau H., Prix Bordin : rapport sur le concours de l'année 1867, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1868, 66, pp 932-934.
- [29] Froehly C. 1981, Coherence and Interferometry through Optical Fibers. In : Ulrich M.H., Kjær K. (eds.) *Proc. ESO conf., Science Importance of High Angular Resolution at Infrared and Optical Wavelengths*. ESO, Garching, p. 285
- [30] Fleck J.A., Morris J.R., Feit M.D. 1976, Time dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere, *Appl. Phys.*, vol 10, pp. 129-160.

- [31] Feit M.D., Fleck J.A., Light propagation in graded index optical fibers *Applied Optics*, vol 17 n°24 (dec. 1978), pp. 3390-3398.
- [32] Feit M.D., Fleck J.A., Calculation of dispersion in graded index multimode fibers by propagating-beam-method, *Applied Optics*, vol 18 n°16 (dec. 1979), pp. 2843-2851.
- [33] Fried D.L. 1966, Optical Resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am.* 56, 1372-1379.
- [34] Fried D.L. 1966, Limiting resolution looking down through the atmosphere. *J. Opt. Soc. Am.* 56, 1380-1384.
- [35] Gatak A Thyagarajan K. 1998 *Introduction to fiber optics*, Cambridge university Press
- [36] Glodge 1971, *Weakly Guiding Fibers*
- [37] Glindemann, A. et al. 2000, in *Proceedings of SPIE*, 4006, 2
- [38] Goodman J. W. 1985, *Statistical Optics*, ed. John Wiley & Sons, Inc., in : Chapter V : Coherence of optical waves, p. 167.
- [39] Guyon, O. 2002, *A&A*, 387, 366 .
- [40] Haguenauer P., Berger J.-P., Rousselet-Perraut K., Kern P., Malbet F., Schanen-Duport I., Benech P., 2000, *Appl Opt* 39, 13
- [41] Haguenauer Pierre, Ph. D. Thesis.
- [42] Hardy J.W. 1998, *Adaptive Optics for astronomical telescopes*, New-York, Oxford University Press, 1998.
- [43] Hartmann L., Kenyon, S.J. 1996, The FU Orionis phenomenon, *A&A*, 34, pp. 207-240.
- [44] Hufnagel R.E. 1974, Variations of atmospheric turbulence. Digest of technical papers, Topical meeting on optical propagation through turbulence, university of Colorado, Boulder, CO, July 9-11, 1974, paper Wal.
- [45] Izawa T., Nahakome H. 1972, Optical waveguides formed by electrically induced migration of ions in glass plates, *Applied Physics Letters* 21, 584.
- [46] Jeunhomme L. 1990, *Single-mode fiber optics*, Marcel Dekker Inc.
- [47] Jennison R.C. 1958, A phase sensitive interferometer technique for the measurement of the Fourier transforms of spatial brightness distributions of small angular extent, *MNRAS* 118, 276
- [48] Kern P., Malbet F., Schanen-Duport I., Benech P. 1996, Integrated optics single-mode interferometric beam combiner for near infrared astronomy. In : Kern P., Malbet F. (eds) *Proc. Astro-Fib'96, Integrated Optics for Astronomical Interferometry*. Bastianelli-Guirimand, Grenoble, p. 19
- [49] Kern P., Berger J.P., Haguenauer P., Malbet F., Perrault K. Planar Integrated Optics for astronomical interferometry, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.2, Série IV, pp. 111-124, 2001.

- [50] Kolmogorov , A. N. 1941, Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. Doklady Akad. Nauk SSSR, 32, 16. (Traduction dans Turbulence, Classic papers on Statistical Theory, eds. S. K. Friedlander and L. Tropper, Interscience, New York, 1961.)
- [51] Labeyrie, A. 1970, Attainment of Diffraction Limited Resolution in Large Telescopes by Fourier Analysing Speckle Patterns in Star Images, A&A, 6, 85.
- [52] Labeyrie, A. 1975, Interference fringes obtained on VEGA with two optical telescopes, ApJ, 1975, 196, pp. L71–L75.
- [53] Lannes, A. 1997, Image reconstruction : from basic notions towards methodological strategies, In : NATO ASIC Proc. 501, High angular resolution in Astrophysics, pp. 115+.
- [54] Laurent E., Schanen-Duport I., Kern P., Pradel A. 2000, Single-mode waveguides in thermal infrared wavelengths for spatial interferometry, in : Proc. ICSO 2000 : International conference on Space Optics, pp. 497-505, Toulouse.
- [55] Laurent E., Rousselet-Perraut K., Schanen-Duport I., Hauguenauer P. et al. 2001, Integrated optics for astronomical interferometry V- extension to the K band, A&A, in preparation. waveguides in thermal infrared wavelengths for spatial interferometry, in : Proc. ICSO 2000 : International conference on Space Optics, pp. 497-505, Toulouse.
- [56] McAlister, H. A. et al. 2000, in Proceedings of SPIE, 4006, 465
- [57] Malbet F., Kern P., Schanen-Duport I., Berger J.P., Rousselet-Perraut K., Benech P. 1998, A&AS 138, 119
- [58] Malbet F., Berger, J.-P. 2001, The nature of the circumstellar matter around FU Orionis, in SF2A-2001 : Semaine de l'Astrophysique Française, pp. 457.
- [59] Malbet F. and Mège P. 2000, Filtering or wide-field for high sensitivity mode?, Tech. Report AMBER-IGR-014, Amber Consortium.
- [60] Marcuse D. 1982, Light transmission optics (2nd edition). New York, Van Nostrand Reinhold Co.
- [61] Marcuse D. 1974, Theory of dielectric optical waveguides, Academic Press, 2nd edition.
- [62] Mariotti, J.-M. and Ridgway, S.T. 1988, Double Fourier spatio-spectral interferometry- Combining high spatial resolution in the near infrared, A&A Supplement series, 195, 350.
- [63] Mariotti J.M. 1992, Coherent combined instrumentation for the VLTI, in : Report for the ESO/VLT Interferometry Panel, April 92.
- [64] Mège P., Malbet F., Chelli A. 2000, Spatial filtering in AMBER. In : Léna P., Quirrenbach A. (eds), p. 299, Interferometry in Optical Astronomy. SPIE 4006, Munich (Germany).
- [65] Mège P. and Malbet F. 2000, "Characteristics of the Gaussian beam at the fiber output", Tech. Report AMB-IGR-012, Amber consortium.
- [66] Mège P., Malbet F., Chelli A. 2001, Interferometry with Single-Mode Waveguides, In : Semaine de l'Astrophysique Française, SF2A Conference on scientific highlights 2001, Lyon, France, May 28-June 1st, F. Combes, D. Barret and F. Thévenin Eds. p581.

- [67] Mennesson, B. et al. 1999, *A&A*, 346, 181.
- [68] Michelson A. A. 1890, On the application of interference methods to astronomical measurements, London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 30, series 5, pp. 1–21.
- [69] Michelson A. A. and Pease, F. G. 1921, Measurement of the diameter of alpha Orionis with the interferometer., *ApJ* 53, pp. 249-259.
- [70] Mourard D., Bonneau D., Glentzlin A., Merlin G., Pétrov R., Pierron M., Thureau N., Abe L., Bério P., Blazit, A., Chesneau O., Stee P., Ragland S., Vakili F., Vérinaud C. 2000, The GI2T/REGAIN interferometer, *Proc. SPIE 4006 : Interferometry in optical astronomy*, pp 434–443.
- [71] Mourard D., Tallon-Bosc I., Rigal F., Bonneau D., Morand F., Stee Ph. 1994, Estimation of visibility amplitude by optical long-baseline Michelson interferometry with larges apertures, *A&A*, 288, pp 675-682.
- [72] Noll R.J. 1976 Zernike polynomials and atmospheric turbulence, *J.O.S.A.*, 65,3, pp 207-211.
- [73] Obukhov A. M. 1949, Structure of the temperature field in a turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser Geograf. Geofiz.*, 13, 58.
- [74] Ollivier M. 1997, Contribution à la recherche d'exoplanètes-Coronographie interférentielle pour la mission DARWIN, Ph D.
- [75] Ollivier, M., Mariotti, J.-M., Léger, A., Sékulić, P., Brunaud, J., & Michel, G. 2001, *A&A*, 370, 1128.
- [76] Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. *Numerical Recipes, The art of Scientific Computing* Cambridge University Press.
- [77] Prasad S., Loos G. 1991, Spatial filtering of Atmospheric decorrelation from Wavefronts. In : Beckerxs J., Merkle F. (eds.) *Proc. ESO conf., High-resolution imaging by interferometry II*. ESO, Garching, 1057.
- [78] Pease F. 1931, Interferometer methods in astronomy, *Ergebnisse de Exakten Naturwissenschaften*, 10, pp. 84–96.
- [79] Perrin, G. 1996., Une unité de recombinaison à fibres pour l'interféromètre IOTA, application à l'étude des étoiles de type tardif, Thèse de Doctorat.
- [80] Petrov R., Malbet F., Richichi A., Hofmann K.-H., Agabi K., Antonelli P., Aristidi E., Baffa C., et al. 2000, AMBER : the near-IR focal instrument for the VLTI. In : Léna P., Quirrenbach A. (eds), *Interferometry in Optical Astronomy. SPIE 4006, Munich (Germany)*.
- [81] Porter A.B. 1906, *Phil. Mag.* 11, 154.
- [82] Poels, J. et al. 2001, *ASP Conf. Ser. 238 : Astronomical Data Analysis Software and Systems X*, 10, 97.

- [83] Reynaud F, Lagorceix H. 1996, Stabilization and Control of a Fiber Array for the Coherent Transport of Beams in a Stellar Interferometer. In : Kern P., Malbet F. (eds) Proc. AstroFib'96, Integrated Optics for Astronomical Interferometry. Bastianelli-Guirimand, Grenoble, p. 249.
- [84] Reynaud F, Alleman J.J., Lagorceix H. 1994, Interferometric fiber arms for stellar interferometry. In : Cerutti-Maori M.-G., Roussel Ph. (eds.), Proc. SPIE 2209, Space Optics 1994 : Earth Observation and Astronomy, 431.
- [85] Ruillier C. 1998, Degraded light coupling into single mode fibers. In : Reasenberg R.D., Unwin S.C. (eds.) Proc. SPIE 3350, Astronomical Telescopes and Instrumentation : Astronomical Interferometry, 319.
- [86] Ruillier C. 1998, Thèse de Doctorat.
- [87] Rohlfs K., Wilson T.L. 1986, Berlin Heidelberg New-York, Tools of Radio Astronomy (Second Completely Revised and Enlarged Edition), Springer-Verlag.
- [88] Roddier F. 1981, The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. In : Progress in optics 19. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., p. 281-376.
- [89] Roddier F. 1986 Triple correlation as a phase closure technique, Optics communication, 60, 3.
- [90] Roddier F. 1981, The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. In : Progress in optics 19. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., p. 281-376.
- [91] Roddier F. 1990, Wavefront Simulation using Zernike polynomials,...
- [92] Rogstad D. 1968, A technique for measuring visibility phase with an optical interferometer in the presence of atmospheric seeing, App Optics 7, 585.
- [93] Shaklan S.B., Roddier F. 1987, Applied Optics 26, 2159.
- [94] Shaklan S.B. 1990, Optical Engineering 29, 684
- [95] Shaklan S.B., Colavita M.M., Shao M. 1991, Visibility calibration using single mode fibers in a long-baseline interferometer. In : Beckers J., Merkle F. (eds.) Proc. ESO conf., High-resolution imaging by interferometry II. ESO, Garching, 1271.
- [96] Sibille, F., Chelli, A., & Léna, P. 1979, A&A, 79, 315.
- [97] Serabyn E. 2000, Nulling interferometry : Seyrabin E. Symmetry Requirements and Experimental Results, in P. Léna A Quirrenbach (ed.) Interferometry in Optical Astronomy, Proceedings of SPIE Vol. 4006 (2000).
- [98] Stéphan E., Extrait d'une lettre de M. Stéphan à M. Fizeau, C.R. Acad. Sci. Paris, 1873, 76, pp. 1008–1010.
- [99] Stéphan, E., Sur l'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes, C.R. Acad. Sci. Paris, 1874, 78, pp. 1008–1012.
- [100] St-Jacques D., Baldwin J.E., Boysen R.C., Haniff C.A., Lawson P.R., Rogers J., Warner P.J., Wilson D.M.A., Young J.S. 1998, Spatial filtering using pinholes at COAST. In : Reasenberg R.D., Unwin S.C. (eds.) Proc. SPIE 3350, Astronomical Telescopes and Instrumentation : Astronomical Interferometry, 762

-
- [101] Strohbehn J.W. 1968, Line-of-sight wave propagation through the turbulent atmosphere. Proc. IEEE 56, 1301-1318.
- [102] Tallon M. and Tallon-Bosc I. 1992, A&A 253, 641.
- [103] Tallon, M. & Tallon-Bosc, I. 1994, IAU Symp. 158 : Very High Angular Resolution Imaging, 158, 83
- [104] , Tatarski, V. I. 1961, Wave propagation in a turbulent medium. MacGraw-Hill, New-York.
- [105] Tatulli, E. ; Mège, P. ; Chelli, A. ; Malbet, F. 2002, SNR on visibilities for fibered interferometers in SF2A-2002 : Semaine de l'Astrophysique Francaise, meeting held in Paris, France, June 24-29, 2002, Eds. : F. Combes and D. Barret, EdP-Sciences (Editions de Physique).
- [106] Townes, C. H. et al. 1998, in Proceedings of SPIE , 3350, 908
- [107] Traub, W. A. et al. 2000, in Proceedings of SPIE , 4006, 715.
- [108] Wallner O., Leeb W.R. 2002, Minimum Length of a Single-Mode Fiber Spatial Filter, JOSA-A, 2002.
- [109] Yaglom A. M. 1949, Doklady Akad. Nauk SSSR, 69, 743.
- [110] Young, J. S. et al. 2001, American Astronomical Society Meeting, 198.
- [111] Ziad, A., Bornino, J., Martin, F., & Agabi, A. 1994, A&A, 282, 1021